Série 9

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z, \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z, \tfrac{3}{4}y + \tfrac{3}{4}z).$$

a. Montrer que f est une projection et décrire les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ de $\mathbb{R}^3$.

b. Quel est l'ensemble $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ formé des éléments de $\mathbb{R}^3$ fixés par f ?

c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \tfrac{1}{7}(-8x + 3y, -5x + 8y).$$

a. Quelle est la nature géométrique de f ?

b. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ de $\mathbb{R}^2$.

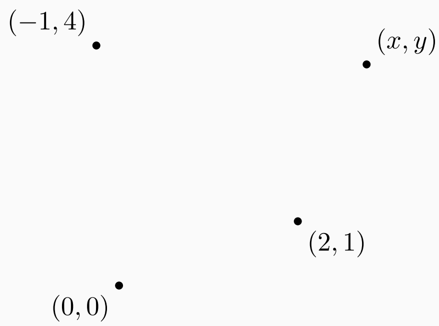
c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x, y) et son image $f(x, y)$ par f.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \tfrac{1}{9}(16x + 4y, 8x + 2y).$$

a. Quel est le rang de f ? Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

b. Après avoir calculé la trace de f, placer $f(x, y)$ sur le dessin ci-dessous.



Exercice 4. Déterminer l'expression de la projection :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

sur le plan vectoriel d'équation $x - y + 3z = 0$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(1, -2, 4)$.

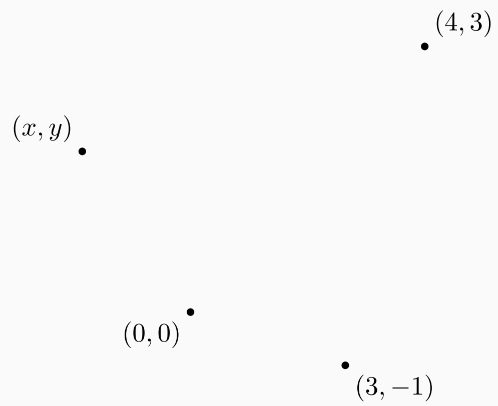
Exercice 5. Déterminer l'expression de la symétrie :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

par rapport à la droite vectorielle d'équation $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = -z$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $3x + 4y + z = 0$.

Exercice 6. Une projection $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envoie $(4,3)$ sur $(3,-1)$.

a. Placer $f(x,y)$ sur le dessin ci-dessous. *Indication : on pourra commencer par placer les axes de projection sur le dessin.*



b. Déterminer la valeur de $f(x,y)$ en fonction de x et y.

Exercice 7. Donner un exemple de projection $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 2 et qui vérifie :

a. que l'on a l'égalité $f(1,0,2) = f(3,-1,5)$.

b. en plus de la condition du a., que $f(-1,4,1) = (-1,4,1)$.

c. en plus des conditions du a. et du b., que $f^{-1}(\{(2,1,7)\}) \neq \varnothing$.

Exercice 8. Est-il vrai ou faux de dire que, pour toute symétrie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on a :

a. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \cup \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$? b. $\mathrm{Ker}\, f \cup \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$? c. $\det f \in \{-1, 1\}$?

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((-2,1,3))$, $\mathrm{Ker}\, f : y + z = 0$.
Ex. 2 : a. symétrie, b. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : y = 5x$, $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : x = 3y$.
Ex. 3 : a. $\mathrm{rg}\, f = 1$, $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((2,1))$, $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}((1,-4))$.
Ex. 4 : $f(x,y,z) = \frac{1}{15}(14x + y - 3z, 2x + 13y + 6z, -4x + 4y + 3z)$.
Ex. 5 : $f(x,y,z) = \frac{1}{11}(4x + 20y + 5z, 6x - 3y + 2z, -3x - 4y - 12z)$.
Ex. 6 : b. $f(x,y) = \frac{1}{13}(12x - 3y, -4x + y)$.
Ex. 8 : a. faux, b. vrai, c. vrai.