Série 8

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \to (x - \tfrac{1}{2}y, -2x + y, 4x - 2y).$$

a. Pour tout $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ des antécédents de w par f.

b. En utilisant le a., identifier $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

c. Même question que a. mais pour l'application $g = 2f$ au lieu de f.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (8y + 12z, 2x - 10y - 16z, -x + 7y + 11z).$$

a. Pour tout $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ des antécédents de w par f.

b. En utilisant le a., déterminer les sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ de $\mathbb{R}^3$.

c. Mêmes questions a. et b. mais pour l'application $g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ au lieu de f.

Exercice 3. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f(-2, 3, 5) = (6, 3).$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire, en justifiant votre réponse, si elle est vraie ou fausse.

a. L'ensemble $f^{-1}(\{(10, 5)\})$ est vide.

b. Si $f(7, 1, -3) = (-4, 1)$ alors $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle.

c. $(-2, 3, 5)$ est le seul antécédent de $(6, 3)$ par f.

d. Si $f^{-1}(\{(1, 2)\})$ est vide alors $f^{-1}(\{(-5, 2)\})$ aussi.

Exercice 4. On donne une une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f^{-1}(\{(2, -2, 4)\}) = \{(1 + 2s + t, -1 + s + t, 1 - s) \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

a. Déterminer une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Ker} f$. Quel est le rang de f ?

b. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

c. Trouver l'expression de $f(x, y, z)$ en fonction de x, y et z.

Exercice 5. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ sachant que $(2, -4)$ n'a aucun antécédent par l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \to ((5 - \alpha)x + (16 - 5\alpha)y + (-\alpha^2 + 13\alpha - 31)z, (5 - 3\alpha)x - 2y + (\alpha^2 - 6\alpha + 11)z).$$

Exercice 6. Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivantes :

$$f(x, y, z) = (-7x - 12y + 15z, 11x + 16y - 25z, 7x + 4y - 19z) \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = (\alpha x - 6y - 4z, (3\alpha - 2)y + \alpha^2 z, x + (\alpha - 1)y + 2z).$$

a. Quel est le rang de f ?

b. Déterminer le rang de g. On discutera en fonction de la valeur de α.

c. Même question que b. mais pour $f \circ g$.

Exercice 7. Déterminer une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 1 telle que :

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Vect}((3,1,-4))\,, \qquad \text{où} \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (-9x+3y-6z, 6x-2y+4z, 15x-5y+10z).$$

Indication : on pourra utiliser des décompositions colonnes-lignes.

Exercice 8. (Facultatif) Est-il vrai ou faux de dire que, pour toutes applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on a :

a. $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$?

b. $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}\, g$?

c. $\mathrm{Ker}(f+g) \cap \mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$?

d. $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}\, f \Rightarrow \mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Im}\, f$?

Éléments de réponse :

Ex. 1 : b. $\mathrm{Im}\, f : x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{4}$, $\mathrm{Ker}\, f : 2x = y$.
Ex. 2 : b. $\mathrm{Im}\, f : x - 2y - 4z = 0$, $\mathrm{Ker}\, f : x = -\frac{y}{3} = \frac{z}{2}$.
Ex. 3 : a. faux, b. vrai, c. faux, d. vrai.
Ex. 4 : a. $\mathrm{Ker}\, f : x - y + z = 0$, $\mathrm{rg}\, f = 1$, b. $(1,-1,2)$, c. $f(x,y,z) = \frac{2}{3}(x-y+z)(1,-1,2)$.
Ex. 5 : $\alpha = 2$.
Ex. 6 : a. $\mathrm{rg}\, f = 2$, b. $\mathrm{rg}\, g = 3$ si $\alpha \notin \{1,2\}$, 2 sinon, c. $\mathrm{rg}(f \circ g) = 2$ si $\alpha \neq 2$, 1 sinon.
Ex. 8 : a. vrai, b. faux, c. vrai, d. vrai.