Série 7

Exercice 1. L'application f donnée est-elle linéaire ? Si oui, en donner la matrice en base canonique.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y) \to (x - y, 2x + 5y, x + y)$

b. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(x, y, z) \to x - y + z + 1$

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$x \to (2x, 0)$.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (x + 5y, x - 3y).$$

a. Calculer le rang de f. En déduire $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b. L'application f est-elle inversible ? Si oui, en donner l'application inverse f^{-1}.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y, 2x + 3y).$$

a. Quel est le rang de f ?

b. Décrire l'ensemble $\operatorname{Im} f$ par une équation cartésienne puis le représenter sur un dessin.

c. Même question que b. mais pour $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 4. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (2x - y + z, x + 3y + 4z, 3x + 2y + 5z).$$

a. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

b. Quel est le rang de f ? Donner une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Im} f$.

c. Décomposer $f(x, y, z)$ dans une base de $\operatorname{Im} f$ et écrire la décomposition minimale correspondante de la matrice de f.

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer si possible une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés données. Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

a. $(1, 2) \in \operatorname{Ker} f$ et $(4, 2) \in \operatorname{Im} f$

b. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ et $(4, -3) \in \operatorname{Ker} f$

c. $f(1, -1) = f(-2, 1) = (1, 1)$.

Indication : quel est le rang de f ?

Exercice 6. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant que :

a. $\operatorname{Im} f$ est le plan vectoriel d'équation $3x + y + 2z = 0$.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $(1, 2, 4) \in \operatorname{Ker} f$.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément, l'image de $(1, 0, 0)$ par f est $(1, 1, -2)$.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = ((1-\alpha^3)x + (1+\alpha^3)y + (-\alpha^3+\alpha+4)z, \alpha x + y + (3\alpha+2)z, -\alpha^3 x + (2+\alpha^3)y + (-\alpha^3+\alpha+3)z).$$

Trouver la valeur de α sachant que $f(1,5,-2)$ et $f(1,2,-1)$ sont proportionnels. *Indication : que peut-on dire du rang de f ?*

Exercice 8. Déterminer, en fonction de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, le rang, le noyau et l'image de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (\alpha x + \beta y + \gamma z, \gamma x + \alpha y + \beta z, \beta x + \gamma y + \alpha z).$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 8, série 2.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. oui, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. non c. oui, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Ex. 2 : a. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$ b. oui, $f^{-1}(x,y) = \frac{1}{8}(3x+5y, x-y)$.
Ex. 3 : a. 1, b. $\operatorname{Im} f : y = 6x$, c. $\operatorname{Ker} f : 2x + 3y = 0$.
Ex. 4 : a. $(-1,-1,1)$, b. $\operatorname{Im} f : x + y - z = 0$.
Ex. 5 : a. possible, b. impossible, c. possible.
Ex. 7 : $\alpha = -1$.