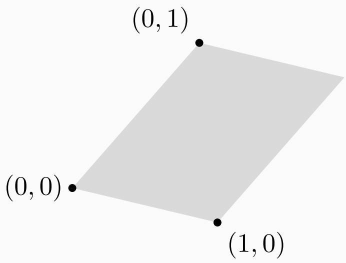
Série 6

Exercice 1. On fixe le repère suivant du plan, où le parallélogramme en gris est d'aire 2.



Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire orientée de la famille v_1, v_2 donnée :

a. $v_1 = (-4, 0), v_2 = (0, 1)$ b. $v_1 = (2, 3), v_2 = (0, -1)$ c. $v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 4)$.

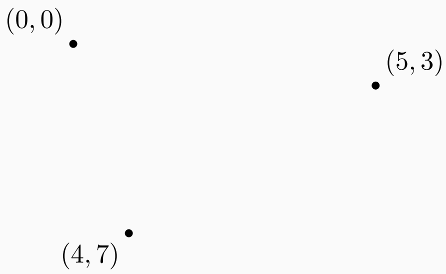
On demande de raisonner à chaque fois de deux façons : d'abord en utilisant la formule avec le déterminant, puis en expliquant à l'aide d'un dessin le lien géométrique entre le parallélogramme construit sur v_1, v_2 et celui construit sur la base canonique.

Exercice 2. On donne les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = (5, 3), (4, 7) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (14, 13), (1, -4).$$

a. Déterminer la matrice de changement de base P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

b. Reproduire (approximativement) le dessin ci-dessous sur votre feuille puis placer $\mathcal{B}'$ dessus.



c. Calculer $\det(P)$ et interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^2$, on donne les éléments suivants :

$$v_1 = (4, -1),\ v_2 = (0, 5),\ v_3 = (1, 2).$$

a. Déterminer une équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ contenant v_1 et v_2 et la représenter sur un dessin.

b. Mêmes questions pour la droite contenant v_3 et dirigée par v_2.

c. Identifier l'intersection des droites introduites en a. et b.

Exercice 4. Combien de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ distincts sont décrits ci-dessous ?

$$(5, -3) + \mathrm{Vect}((2, -1)) \ , \qquad 2x + 4y + 2 = 0, \qquad (25, -13) + \mathrm{Vect}((-\sqrt{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}))$$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, donner une équation du plan V de $\mathbb{R}^3$ décrit par les conditions données :

a. $(3,-1,2),(4,-1,-1)$ et $(2,0,2)$ appartiennent à V.

b. V contient $(3,-2,-7)$ et est parallèle au plan d'équation $2x-3z+5=0$.

c. V contient $(2,-1,3)$ ainsi que la droite d'équations $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les trois plans suivants :

$$U : x+y+z=3\,,\quad V : x+2y+3z=6\,,\quad W : 2x+y=7.$$

a. Donner une description paramétrique de $U\cap V$.

b. Représenter sur un dessin les plans U et V ainsi que leur intersection.

c. Identifier l'intersection $U\cap V\cap W$ puis placer W sur votre dessin.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne le système suivant, avec second membre indéterminé :

$$\begin{cases} x-4y+7z=\alpha \\ 3x+y+8z=\beta \\ 2x-8y+14z=\gamma. \end{cases}$$

En discutant selon la valeur des paramètres réels α,β et γ, résoudre ce système et interpréter géométriquement la résolution.

Exercice 8. Si c'est possible, donner les équations d'une droite V de $\mathbb{R}^3$ telle que :

a. $(-3,-2,1)$ appartient à V.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, V est parallèle au plan d'équation $3x-5y+4z=12$.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément V possède un élément en commun avec la droite d'équations :

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}.$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. -8, b. -4, c. 0.
Ex. 2 : a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, c. -3.
Ex. 3 : a. $3x+2y=10$, b. $x=1$, c. $(1,\frac{7}{2})$.
Ex. 4 : un seul.
Ex. 5 : a. $3x+3y+z=8$, b. $2x-3z=27$, c. $-6x+20y+11z=1$.
Ex. 6 : c. vide.