

## Série 5

**Exercice 1.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne les éléments suivants :

$$v_1 = (2, -2, 1), v_2 = (1, 3, 1), v_3 = (-1, 1, -\frac{1}{2}), v_4 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la dimension et une base de  $V$  :

- a.  $V = \text{Vect}(v_1, v_2)$       b.  $V = \text{Vect}(v_1, v_3)$       c.  $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_4)$ .

**Exercice 2.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne la famille  $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ , où :

$$v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (-1, 3, 0), v_3 = (1, -1, 2).$$

- a. Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- b. Ecrire des équations de la droite vectorielle  $\text{Vect}(v_1)$ . Même question pour  $\text{Vect}(v_2)$ .
- c. Déterminer une équation du plan vectoriel  $\text{Vect}(v_1, v_2)$ .
- d. Pour tout  $v = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , calculer  $[v]_{\mathcal{B}}$  et écrire la décomposition de  $v$  sur  $\mathcal{B}$ . Vérifier votre résultat avec  $v = (0, 1, 0)$ .

**Exercice 3.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne les deux familles suivantes :

$$\mathcal{B} = (1, 1, -1), (3, -2, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (2, -3, 1), (1, -4, 2).$$

- a. Montrer que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des bases d'un même plan vectoriel  $V$  dont on donnera une équation.
- b. Déterminer la matrice de changement de base de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .
- c. Soit  $v = (x, y, z)$  un élément de  $V$ . Décomposer  $v$  sur  $\mathcal{B}$  et en déduire  $[v]_{\mathcal{B}}$ .
- d. Calculer alors  $[v]_{\mathcal{B}'}$  et donner la décomposition de  $v$  correspondante. Vérifier votre résultat avec  $v = (1, 1, -1)$ .

**Exercice 4.** On donne les éléments suivants de  $\mathbb{R}^3$  :

$$v_1 = (0, 2, -7), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (2, -1, 1), \quad v = (x, y, z).$$

- a. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- b. On suppose que :

$$v \in \text{Vect}(v_1).$$

Quelle est la valeur de  $x$ ? Exprimer  $[v]_{\mathcal{B}}$  uniquement en fonction de  $z$ .

- c. On suppose maintenant que :

$$v \in \text{Vect}(v_2, v_3).$$

Exprimer alors  $[v]_{\mathcal{B}}$  uniquement en fonction de  $x$  et  $y$ .

**Exercice 5.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , trouver une base  $\mathcal{B}$  du plan vectoriel  $V$  d'équation  $3x - 5y + z = 0$  vérifiant que :

$$\forall v = (x, y, z) \in V, \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}.$$

*Indication : commencer par produire une base de  $V$  (sans la condition supplémentaire).*

**Exercice 6.** Si c'est possible, déterminer une base  $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que :

- $\text{Vect}(v_1, v_2)$  est le plan vectoriel d'équation  $2x + y + 2z = 0$ .
- Même condition qu'au a. et, en supplément,  $\text{Vect}(v_2, v_3)$  contient  $(4, 1, 3)$  et  $(-6, 5, 2)$ .
- Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément :

$$[(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.** Est-il vrai que, pour tout choix d'éléments  $v_1, v_2, v_3$  de  $\mathbb{R}^3$  on a :

- $\text{Vect}(v_1, v_2) \cup \text{Vect}(v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$  ?
- si  $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  alors  $v_1, v_2, v_3$  l'est aussi.
- $\text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_1, v_3) = \text{Vect}(v_1)$  ?
- si  $v_1, v_2, v_3$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  alors  $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$  l'est aussi.

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

**Exercice 8.** Trouver  $\alpha \in \mathbb{R}$  sachant que  $(2\alpha^2 - 1, \alpha, 2 - 4\alpha)$  n'est pas combinaison linéaire de la famille :

$$(1, 2, -1), (-1, \alpha - 2, \alpha + 1), (2\alpha, 4\alpha - 1, -\alpha - 2).$$

*Éléments de réponse :*

**Ex. 1 :** a. dim 2, b. dim 1, c. dim 2.

**Ex. 2 :** b.  $\frac{x}{2} = y = -z$  et  $-x = \frac{y}{3}, z = 0$ , c.  $3x + y + 7z = 0$ .

**Ex. 3 :** a.  $2x + 3y + 5z = 0$ , b.  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Ex. 4 :** b.  $x = 0, \begin{pmatrix} -\frac{z}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , c.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Ex. 5 :**  $\mathcal{B} = (\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -2), (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1)$ .

**Ex. 7 :** a. faux, b. vrai, c. faux, d. faux.

**Ex. 8 :**  $\alpha = 0$ .