

Série 5

Exercice 1. Dans \mathbb{R}^3 , on donne les éléments suivants :

$$v_1 = (2, -2, 1), v_2 = (1, 3, 1), v_3 = (-1, 1, -\frac{1}{2}), v_4 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la dimension et une base de V :

a. $V = \text{Vect}(v_1, v_2)$

b. $V = \text{Vect}(v_1, v_3)$

c. $V = \text{Vect}(v_1, v_2, v_4)$.

Exercice 2. Dans \mathbb{R}^3 , on donne la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$, où :

$$v_1 = (2, 1, -1), v_2 = (-1, 3, 0), v_3 = (1, -1, 2).$$

- Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .
- Ecrire des équations de la droite vectorielle $\text{Vect}(v_1)$. Même question pour $\text{Vect}(v_2)$.
- Déterminer une équation du plan vectoriel $\text{Vect}(v_1, v_2)$.
- Pour tout $v = (x, y, z)$ de \mathbb{R}^3 , calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition de v sur \mathcal{B} . Vérifier votre résultat avec $v = (0, 1, 0)$.

Exercice 3. Dans \mathbb{R}^3 , on donne les deux familles suivantes :

$$\mathcal{B} = (1, 1, -1), (3, -2, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (2, -3, 1), (1, -4, 2).$$

- Montrer que \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases d'un même plan vectoriel V dont on donnera une équation.
- Déterminer la matrice de changement de base de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .
- Soit $v = (x, y, z)$ un élément de V . Décomposer v sur \mathcal{B} et en déduire $[v]_{\mathcal{B}}$.
- Calculer alors $[v]_{\mathcal{B}'}$ et donner la décomposition de v correspondante. Vérifier votre résultat avec $v = (1, 1, -1)$.

Exercice 4. On donne les éléments suivants de \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (0, 2, -7), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (2, -1, 1), \quad v = (x, y, z).$$

- Montrer que la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- On suppose que :

$$v \in \text{Vect}(v_1).$$

Quelle est la valeur de x ? Exprimer $[v]_{\mathcal{B}}$ uniquement en fonction de z .

- On suppose maintenant que :

$$v \in \text{Vect}(v_2, v_3).$$

Exprimer alors $[v]_{\mathcal{B}}$ uniquement en fonction de x et y .

Exercice 5. Dans \mathbb{R}^3 , trouver une base \mathcal{B} du plan vectoriel V d'équation $3x - 5y + z = 0$ vérifiant que :

$$\forall v = (x, y, z) \in V, \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}.$$

Indication : commencer par produire une base de V (sans la condition supplémentaire).

Exercice 6. Si c'est possible, déterminer une base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de \mathbb{R}^3 telle que :

- a. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ est le plan vectoriel d'équation $2x + y + 2z = 0$.
- b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $\text{Vect}(v_2, v_3)$ contient $(4, 1, 3)$ et $(-6, 5, 2)$.
- c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément :

$$[(0, 0, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Est-il vrai que, pour tout choix d'éléments v_1, v_2, v_3 de \mathbb{R}^3 on a :

- a. $\text{Vect}(v_1, v_2) \cup \text{Vect}(v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$?
- b. si $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ est une base de \mathbb{R}^3 alors v_1, v_2, v_3 l'est aussi.
- c. $\text{Vect}(v_1, v_2) \cap \text{Vect}(v_1, v_3) = \text{Vect}(v_1)$?
- d. si v_1, v_2, v_3 est une base de \mathbb{R}^3 alors $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$ l'est aussi.

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Exercice 8. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ sachant que $(2\alpha^2 - 1, \alpha, 2 - 4\alpha)$ n'est pas combinaison linéaire de la famille :

$$(1, 2, -1), (-1, \alpha - 2, \alpha + 1), (2\alpha, 4\alpha - 1, -\alpha - 2).$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\dim 2$, b. $\dim 1$, c. $\dim 2$.

Ex. 2 : b. $\frac{x}{2} = y = -z$ et $-x = \frac{y}{3}, z = 0$, c. $3x + y + 7z = 0$.

Ex. 3 : a. $2x + 3y + 5z = 0$, b. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 4 : b. $x = 0, \begin{pmatrix} -\frac{z}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix}$.

Ex. 5 : $\mathcal{B} = (\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -2), (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1)$.

Ex. 7 : a. faux, b. vrai, c. faux, d. faux.

Ex. 8 : $\alpha = 0$.