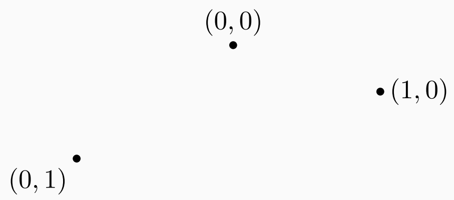
Série 4

Exercice 1. Sur une feuille de papier, reproduire (approximativement) la figure suivante :



a. Placer $(3,-1)$ sur le dessin. Calculer ensuite $-\frac{1}{2}(3,-1)$ et donner une construction géométrique du résultat.

b. Placer $(2,1)$ et $(-1,-1)$ sur le dessin. Calculer $(2,1)+(-1,-1)$ et donner une construction géométrique du résultat.

c. Représenter sur le dessin la droite vectorielle $\mathrm{Vect}((3,2))$ et en donner une équation.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^2$, on donne la droite vectorielle :

$$V : 5x + 3y = 0.$$

a. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de V.

b. Soit $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si v appartient à V, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ en fonction de x uniquement, puis en fonction de y uniquement.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^2$, on donne la famille :

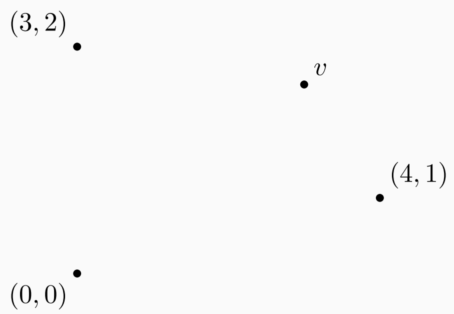
$$\mathcal{B} = (3,2), (4,1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ à $\mathcal{B}$.

b. Quel élément de $\mathbb{R}^2$ a pour coordonnées $\binom{3}{-1}$ dans la base $\mathcal{B}$?

c. Pour tout $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition de v dans $\mathcal{B}$.

d. Faire apparaitre géométriquement la décomposition trouvée au c. sur la figure ci-dessous.



Exercice 4. On donne les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:

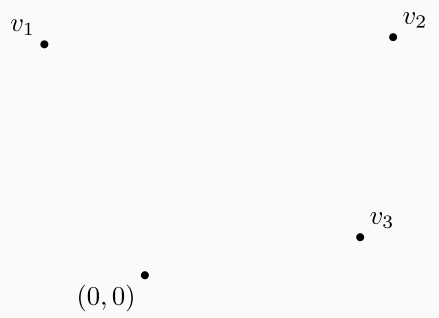
$$\mathcal{B} = (0,2), (1,-3) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (-1,1), (2,1).$$

a. Déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

b. Pour tout élément v de $\mathbb{R}^2$ exprimer $[v]_{\mathcal{B}'}$ en fonction de $[v]_{\mathcal{B}}$.

c. Contrôler la relation écrite au b. sur quelques exemples de votre choix.

Exercice 5. On considère trois éléments v_1, v_2 et v_3 de $\mathbb{R}^2$ représentés dans le plan comme ci-dessous :



Les familles $\mathcal{B} = v_1, \frac{1}{2}v_2$ et $\mathcal{B}' = v_2, v_3$ sont alors des bases de $\mathbb{R}^2$ et on note P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire en justifiant votre réponse si elle est vraie ou fausse.

a. $\gamma = 0$ b. $\beta < 0$ c. $\delta < 1$.

Exercice 6. Dans chacun des cas suivants, déterminer la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant la condition donnée :

a. la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_{\text{can}}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x - 5y \\ -2x + 9y \end{pmatrix}$.

c. la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}' = (7, 1), (4, -5)$ de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7. Donner un exemple de base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie :

a. que l'on a l'égalité $[(0, 1)]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

b. en plus de la condition du a., que la première coordonnée de $(2, 1)$ en base $\mathcal{B}$ est nulle.

c. en plus des conditions du a. et du b., que les deux coordonnées de $(1, 1)$ en base $\mathcal{B}$ sont égales.

Exercice 8. Déterminer la valeur du réel α sachant que l'on a l'inclusion :

$$\mathrm{Vect}((1, \alpha + 4), (\alpha, 5\alpha + 6)) \subset \mathrm{Vect}((\alpha - 1, \alpha^2 + 5)).$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, b. $(1, 0)$.
Ex. 3 : a. $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, b. $(5, 5)$.
Ex. 4 : a. $\begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Ex. 5 : a. F, b. V, c. F.
Ex. 6 : a. $(-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$, $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$, b. $(-9, -2), (-5, -1)$, c. $(15, -9), (-3, -6)$.
Ex. 7 : c. $(1, \frac{3}{2}), (1, \frac{1}{2})$.
Ex. 8 : 3.