Série 2

Exercice 1. Dans $M_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a. Quel est le rang de A ?

b. Ecrire des décompositions colonne-ligne minimales de A.

Exercice 2. Dans $M_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Exercice 3. Dans $M_{2,3}(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ -3 & -12 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Quel est le rang de A ?

b. Donner une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Exercice 5. Sachant que :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = 3\,,$$

calculer chacun des déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha+2\lambda & \beta+2\mu & \gamma+2\sigma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2\beta & \gamma & \alpha \\ 2\mu & \sigma & \lambda \\ 2\varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3(\delta-\varepsilon) & 3\rho & \varepsilon \\ \alpha-\beta & \gamma & \frac{1}{3}\beta \\ \lambda-\mu & \sigma & \frac{1}{3}\mu \end{vmatrix}$.

Exercice 6. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & 1+2\alpha \\ 8\alpha-\alpha^2 & \alpha^2-6\alpha-4 \end{pmatrix}.$$

a. Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

b. Déterminer le rang de A en fonction de la valeur du paramètre α.

Exercice 8. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\beta+\gamma = 0 \text{ ou } \alpha = \beta = \gamma.$$

Indication : que vaut la somme des lignes dans le déterminant étudié ?

Exercice 9. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. 1, b. $A = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \cdots$

Ex. 2 : a. 3, b. oui, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Ex. 3 : a. 2, b. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots$

Ex. 4 : a. 60, b. 0, c. 8.

Ex. 5 : a. -3, b. -6, c. 3.

Ex. 6 : -100.

Ex. 7 : a. $\alpha \neq -1, -2$, b. rang 1 si $\alpha = -1, -2$, rang 2 sinon.