Série 1

Exercice 1. Dans chacun des cas, effectuer le calcul matriciel proposé :

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ c. ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas, calculer si possible le produit proposé :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Dans $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

a. Appliquer sur cette matrice les opérations élémentaires suivantes :

$$C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2,\ L_1 \leftrightarrow L_2,\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ C_2 \leftarrow 2C_2.$$

b. Faire voir le processus du a. comme des multiplications successives par des matrices élémentaires (que l'on donnera).

Exercice 4. Dans chacun des cas, donner deux matrices élémentaires E_1 et E_2 vérifiant la condition donnée :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} E_1E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ b. $E_1E_2\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ c. $E_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Dans cet exercice, on souhaite identifier le *centre de* $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ qui est par définition l'ensemble :

$$Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R})) = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \quad | \quad \forall B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ AB = BA\}.$$

Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, on sait déjà que $Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R})) \neq \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

a. On appelle *matrice scalaire* une matrice du type αI_3, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'une matrice scalaire appartient à $Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}))$.

b. Réciproquement, soit $A \in Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}))$. Calculer AB et BA, avec :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire que certains coefficients de la matrice A sont nuls. Utiliser ensuite d'autres cas particuliers pour B afin de montrer que A est une matrice scalaire.

Exercice 6. Déterminer une matrice $X \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$X \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication : commencer par observer les changements sur les lignes ou les colonnes.

Exercice 7. Montrer que, pour toutes matrices A, B et C dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a les égalités :

a. $(A+B)+C = A+(B+C)$ b. $(A+B)C = AC+BC$ c. $(AB)C = A(BC)$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ex. 2 : a. (8), b. $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} -4 & 8 & 20 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, d. non défini.

Ex. 3 : a. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ -14 & -10 & 17 \end{pmatrix}$.