Série 14

Exercice 1. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \to (x - z, y - x).$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer alors si possible des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on commencera par écrire la décomposition voulue de $f(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 2. On donne les applications linéaires suivantes, dont on note A et B les matrices respectives en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (3x + 4y, 6x + 8y) \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (2x - 7y, 0).$$

a. Montrer que A et B sont équivalentes. Sont-elles colonne-équivalentes ? ligne-équivalentes ?

b. Déterminer deux bases de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles f est représentée par la matrice B, c'est-à-dire trouver $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = B.$$

c. Montrer comment produire A à partir de B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Exercice 3. On donne l'application linéaire suivante, dont on note A la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (x + 2y, 3x + 5y).$$

On note aussi B la matrice construite en appliquant à A la suite d'opérations élémentaires suivantes :

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1,\ L_1 \leftrightarrow L_2,\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

a. Ecrire les matrices A et B. Montrer qu'elles sont colonne-équivalentes et ligne-équivalentes.

b. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}} = B.$$

c. Produire B à partir de A par une suite d'opérations sur les lignes. *Indication : on pourra "passer" par la matrice I_2.*

Exercice 4. On donne les applications linéaires suivantes, dont on note A et B les matrices en bases canoniques :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \to (x + 4y, 7x - 3y, -x + 2y) \qquad (x, y) \to (x, y) \to (-2x + 3y, x - 2y, 5x + 6y)$$

a. Montrer que les matrices A et B sont ligne-équivalentes. Sont-elles colonne-équivalentes ?

b. On note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = B.$$

Exercice 5. On donne, en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A et B sont toujours colonne-équivalentes.

b. A quelle(s) condition(s) sur α et β sont-elles ligne-équivalentes ? *Indication : discuter selon que $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$.*

Exercice 6. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (3x + 2y + z, -3x + z, -y - z).$$

Si c'est possible, déterminer alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. La dernière colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, la dernière ligne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément, la première colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 7. On donne les applications linéaires suivantes, dont on note A et B les matrices respectives en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \to (5x + 4y + z, x + 5y + 5z, -x + 2y + 3z)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x, y, z) \to (3x + y + 2z, x + 2y + z, -7x + 6y - 3z)$$

a. Les matrices A et B sont elles équivalentes ? colonne-équivalentes ? ligne-équivalentes ?

b. Dans $M_3(\mathbb{R})$, déterminer une matrice qui est colonne-équivalente à A et ligne-équivalente à B.

Exercice 8. Est-il vrai ou faux de dire que, pour tout choix de matrices colonne-équivalentes $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ on a :

a. A et $A + B$ sont colonne-équivalentes ? b. BA et B^2 sont colonne-équivalentes ? c. A^2 et B^2 sont colonne-équivalentes ?

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, 1, 1))$, $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, a. et b. possible, c. impossible.
Ex. 2 : a. non, non.
Ex. 3 : a. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, b. $\mathcal{B} = (-21, 13), (-8, 5)$.
Ex. 4 : a. non.
Ex. 5 : b. $\alpha = \beta$ ou $\beta = 0$.
Ex. 6 : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, -3, 3))$, $\operatorname{Im} f : x + y + 2z = 0$
Ex. 7 : a. oui, non, non.
Ex. 8 : a. faux, b. vrai, c. faux.