Série 13

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, calculer A^n en fonction de n, où A est la matrice proposée.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On donne deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n. \end{cases}$$

Calculer les valeurs exactes de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 3. On donne deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = (\sqrt{3} - 2)u_n + \sqrt{\frac{3}{2}}v_n. \end{cases}$$

a. Calculer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

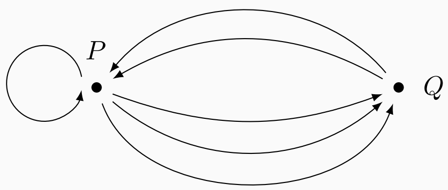
b. Montrer que les suites données sont périodiques.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$:

a. $A = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 34 & -15 \\ 50 & -21 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 7 & -25 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

Indication : pour b. et c. on pourra commencer par réduire A.

Exercice 5. La figure ci-dessous représente deux points P et Q reliés entre eux par des chemins à sens unique, dont le nombre est donné par les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$:



a. Compter le nombre de chemins à 2 étapes allant de P à P, de P à Q, de Q à P et de Q à Q.

b. Calculer la matrice A^2 et comparer avec les nombres trouvés en a. Que constatez-vous ?

c. En généralisant, interpréter, pour tout $n \geqslant 1$, les coefficients de la matrice A^n comme nombres de chemins à n étapes dans le circuit, puis montrer votre résultat. *Indication : on pourra raisonner par récurrence.*

d. Calculer, en fonction de l'entier n, le nombre de chemins à n étapes joignant P à Q.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les données initiales $u_0 = \alpha$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

a. Dans le cas où $\alpha = 0$, calculer la valeur exacte de u_n en fonction de n.

b. Déterminer la valeur de α sachant que la suite $(\frac{u_n}{3^n})_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie, et calculer cette limite.

Exercice 7. On donne une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité suivante :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Ce résultat porte le nom de *théorème de Cayley-Hamilton*.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$, c. $(\sqrt{2})^n \begin{pmatrix} \cos(\frac{n\pi}{4}) & \sin(\frac{n\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{n\pi}{4}) & \cos(\frac{n\pi}{4}) \end{pmatrix}$.
Ex. 2 : $u_n = (3n+2)2^{n-1}$, $v_n = 3n2^{n-1}$.
Ex. 3 : a. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.
Ex. 5 : d. $\frac{3}{5}(3^n - (-2)^n)$.
Ex. 6 : a. $u_n = 4^n - 3^n$, b. $\frac{1}{3}$.