Série 12

Exercice 1. Déterminer une forme réduite de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée.

a. $f : (x, y) \to (14x + 25y, -x + 4y)$ b. $f : (x, y) \to (2x + 5y, -2x)$ c. $f : (x, y) \to (10x - 21y, 4x - 9y)$.

On ne demande pas d'effectuer la réduction explicitement.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (3x - 2y, -x + 2y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire ses valeurs propres.
b. f est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base propre pour f.
c. Représenter sur un croquis les sous-espaces propres de f ainsi qu'un point (x, y) et son image $f(x, y)$ par f.

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (7x + 5y, -5x - 3y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f et en déduire les valeurs propres (éventuelles).
b. Donner une forme réduite de f.
c. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f est représentée par cette forme réduite.

Exercice 4. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (2x + 17y, -x + 4y).$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de f. En déduire une forme réduite de f.
b. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f est représentée par cette forme réduite.

Exercice 5. Donner un contre-exemple à chacun des énoncés suivants. Pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ...

a. ... si A et B sont diagonalisables alors AB l'est aussi.
b. ... si AB est diagonalisable alors A ou B l'est aussi.
c. ... si A et B sont diagonalisables alors $A + B$ l'est aussi.

Indication : commencer par écrire une liste de matrices diagonalisables et une liste de matrices non-diagonalisables.

Exercice 6. Déterminer un exemple d'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

qui n'est pas diagonalisable et telle que $f(1, 2) = (3, 6)$. *Indication : quelle est la forme réduite de f ?*

Exercice 7. En discutant selon la valeur des réels α, β, γ, déterminer une forme réduite de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha x + \beta y, \gamma x + \alpha y).$$

On ne demande pas de produire une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f est représentée par cette forme réduite.

Exercice 8. On donne une application linéaire dont la matrice est *symétrique* :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (\alpha x + \beta y, \beta x + \gamma y).$$

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. On suppose que $f \neq \alpha\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Montrer que si l'on visualise $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un repère orthonormé direct du plan alors f possède comme sous-espaces propres 2 droites vectorielles orthogonales. *Indication : discuter selon que $\beta = 0$ ou $\beta \neq 0$.*

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\left(\begin{smallmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 9 \end{smallmatrix}\right)$, b. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, c. $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
Ex. 2 : a. $(X-1)(X-4)$, b. oui.
Ex. 3 : a. 2, b. $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
Ex. 4 : a. $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.