Série 11

Exercice 1. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (3x - y, x + 2y) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (1, 4), (2, 7).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour tout élément $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Déterminer la famille $f(\mathcal{B})$. En déduire les matrices $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}}$ et $[f]_{\mathcal{B}}$, où on note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c. Calculer la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$.

Exercice 2. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (x + y + 3z)(1, 2, -1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (2, 4, -2), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Calculer la famille $f(\mathcal{B})$ et la décomposer sur $\mathcal{B}$. En déduire la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ représentant f en base $\mathcal{B}$.

c. Vérifier vos résultats du a. et b. en testant la validité de la formule $[f(v)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}}$.

Exercice 3. On donne la base $\mathcal{B} = (2, 5), (1, 6)$ de $\mathbb{R}^2$ ainsi que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,\ [f(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$, où on note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. *Indication : aucun calcul n'est nécessaire.*

b. Calculer la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ et déterminer la famille $f(\mathcal{B})$.

c. Calculer $f(v)$ et en déduire la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$.

Exercice 4. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (x + 3y - 5z, -2x - 6y + 10z, 4x + 12y - 20z).$$

a. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer la matrice B obtenue à partir de A par la suite d'opérations élémentaires :

$$C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1\,,\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\,,\ C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1\,,\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1\,.$$

c. Déterminer deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = B\,.$$

Indication : utiliser des matrices élémentaires.

Exercice 5. On donne la base $\mathcal{B} = (1, 2), (2, -3)$ de $\mathbb{R}^2$, ainsi que l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to \tfrac{1}{7}(3x + 2y, 6x + 4y).$$

a. Déterminer la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$.

b. Ecrire l'expression analytique de f en base $\mathcal{B}$ et interpréter géométriquement.

Exercice 6. On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \mathcal{B} = (11,-29),(20,31) \\ \mathcal{B}' = (3,-5,1),(2,0,3),(4,7,2). \end{cases}$$

On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

a. Quel est le rang de f ? b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. c. Donner une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 7. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ainsi qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. On suppose que f est inversible.

a. Montrer que la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément v de $\mathbb{R}^3$, calculer aussi $[f(v)]_{f(\mathcal{B})}$ en fonction de $[v]_{\mathcal{B}}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

b. $[f]_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})} = I_3$ c. $[f]_{f(\mathcal{B})} = [f]_{\mathcal{B}}$ d. $[f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}} = [f \circ f]_{\mathcal{B}}$.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $(-7x+2y)(1,4)+(4x-y)(2,7)$, b. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 25 & 39 \\ -13 & -20 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} -19 & 11 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$.

Ex. 2 : a. $\frac{x}{2}(2,4,-2)+(y-2x)(0,1,0)+(z+x)(0,0,1)$, b. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 3 : a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, c. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}$.

Ex. 4 : a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -6 & 10 \\ 4 & 12 & -20 \end{pmatrix}$, b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c. $\mathcal{B} = (1,0,0),(-3,1,0),(5,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (1,-2,4),(0,1,0),(0,0,1)$.

Ex. 5 : a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex. 6 : a. 1, b. $(42,-27)$, c. $\frac{x}{4} = -\frac{y}{3} = -\frac{z}{5}$.