Série 10

Exercice 1. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \frac{1}{\sqrt{10}}(3x + y, -x + 3y).$$

a. Calculer $f(1, 0)$ et placer ce point dans le plan muni d'un repère orthonormé direct.

b. Déterminer la nature géométrique de f.

Exercice 2. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \frac{1}{13}(-5x + 12y, 12x + 5y).$$

a. Ecrire la matrice de f en base canonique. Quelle est la nature géométrique de f ?

b. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, faire apparaitre un point (x, y) ainsi que son image $f(x, y)$ par f.

Exercice 3. Déterminer l'expression de la réflexion :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dont l'axe est la droite vectorielle d'équation $5x + 4y = 0$.

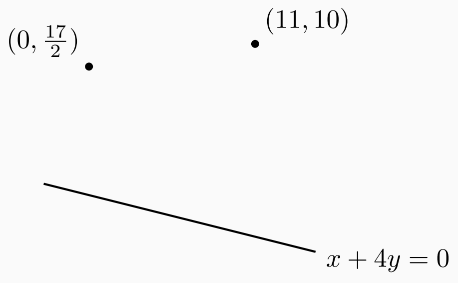
Exercice 4. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie comme la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Donner l'expression de $f(x, y)$ en fonction de x et y.

b. En discutant selon la valeur de l'entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'application linéaire :

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Exercice 5. On munit le plan d'un repère orthonormé direct. Un joueur de billard souhaite taper une boule se trouvant en $(11, 10)$ pour atteindre une autre boule située en $(0, \frac{17}{2})$, après un rebond sur la droite d'équation $x + 4y = 0$:

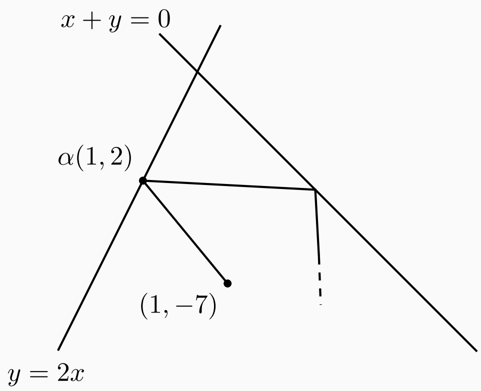


a. Reproduire le dessin ci-dessus sur une feuille puis tracer la trajectoire solution du problème.

b. Déterminer l'expression de la réflexion f d'axe $x + 4y = 0$.

c. Identifier le point de rebond.

Exercice 6. On munit le plan d'un repère orthonormé direct. En tapant une boule située en $(1, -7)$, un joueur de billard la fait rebondir successivement sur la droite d'équation $y = 2x$ puis sur celle d'équation $x + y = 0$:

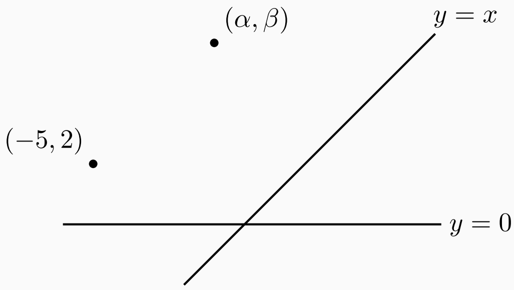


a. Déterminer l'expression de la réflexion f d'axe $y = 2x$ et celle de la réflexion g d'axe $x + y = 0$.

b. Trouver la valeur de α pour que le second rebond s'effectue en $(3, -3)$.

c. Pour quelle valeur de α la boule repasse-t-elle par son point de départ après le deuxième rebond ?

Exercice 7. On munit le plan d'un repère orthonormé direct. En tapant une boule située en $(-5, 2)$ un joueur de billard la fait rebondir successivement sur la droite d'équation $y = 0$ puis sur celle d'équation $y = x$:



a. Déterminer l'expression de la réflexion f d'axe $y = 0$ et celle de la réflexion g d'axe $y = x$.

b. Trouver la nature et les éléments caractéristiques de l'application composée $f \circ g$.

c. Faire apparaitre sur le dessin la zone formée des points (α, β) que le joueur peut atteindre après les deux rebonds.

Éléments de réponse :

Ex. 1 : a. $\frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1)$, b. rotation d'angle $-\arccos(\frac{3}{\sqrt{10}})$.
Ex. 2 : a. réflexion d'axe $3x = 2y$.
Ex. 3 : $f(x, y) = \frac{1}{41}(-9x - 40y, -40x + 9y)$.
Ex. 4 : a. $f(x, y) = \frac{1}{2}(-x - \sqrt{3}y, \sqrt{3}x - y)$.
Ex. 5 : b. $f(x, y) = \frac{1}{17}(15x - 8y, -8x - 15y)$, c. $(2, -\frac{1}{2})$.
Ex. 6 : a. $f(x, y) = \frac{1}{5}(-3x + 4y, 4x + 3y)$, $g(x, y) = (-y, -x)$, b. $\alpha = -\frac{8}{5}$, c. $\alpha = -\frac{5}{4}$.
Ex. 7 : a. $f(x, y) = (x, -y)$, $g(x, y) = (y, x)$, b. rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.