Série 11

Exercice 1. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (3x-y, x+2y) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = (1,4),(2,7).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour tout élément $v = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Déterminer la famille $f(\mathcal{B})$. En déduire les matrices $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}}$ et $[f]_{\mathcal{B}}$, où on note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c. Calculer la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$.

Solution:

a. Les couples $(1,4)$ et $(2,7)$ ne sont pas proportionnels : ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. La matrice de changement de base de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$ est égale à :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pour passer des coordonneés canoniques de v à ses coordonnées en base $\mathcal{B}$, il faut multiplier par la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$, qui n'est autre que P^{-1}. Autrement dit :

$$[v]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x+2y \\ 4x-y \end{pmatrix}.$$

La décomposition de v sur $\mathcal{B}$ s'écrit donc :

$$(x,y) = (-7x+2y)(1,4) + (4x-y)(2,7).$$

b. La famille $f(\mathcal{B})$ (image de $\mathcal{B}$ par f) est obtenue en appliquant f à chaque élément de $\mathcal{B}$. Un calcul direct donne :

$$f(1,4) = (-1,9), \quad f(2,7) = (-1,16).$$

Passons alors au calcul des matrices demandées. Les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}}$ ne sont autres que :

$$[f(1,4)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad [f(2,7)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on obtient :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}.$$

Pour le calcul de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$, on doit maintenant rechercher les coordonnées des éléments de $f(\mathcal{B})$ non plus dans la base canonique mais dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, ou, ce qui revient au même, on doit décomposer $f(\mathcal{B})$ sur $\mathcal{B}$. Or, les calculs faits ci-dessus permettent justement d'écrire ces décompositions :

$$\begin{cases} f(1,4) = (-1,9) = 25(1,4) - 13(2,7) \\ f(2,7) = (-1,16) = 39(1,4) - 20(2,7) \end{cases}$$

Les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ sont donc :

$$[f(1,4)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 25 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad [f(2,7)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 39 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 25 & 39 \\ -13 & -20 \end{pmatrix}.$$

c. Calculons la famille $f(\mathcal{B}_{\text{can}})$ (image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^2$) :

$$f(1,0) = (3,1), \quad f(0,1) = (-1,2).$$

En utilisant la formule générale trouvée au a. pour les coordonnées en base $\mathcal{B}$ on obtient alors :

$$[f(1,0)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -19 \\ 11 \end{pmatrix} \quad [f(0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

On vient en fait d'identifier les colonnes de la matrice recherchée. Par conséquent :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -19 & 11 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire f suivante ainsi que la famille $\mathcal{B}$ d'éléments de $\mathbb{R}^3$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (x + y + 3z)(1, 2, -1) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = (2, 4, -2), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$.

b. Calculer la famille $f(\mathcal{B})$ et la décomposer sur $\mathcal{B}$. En déduire la matrice $[f]_\mathcal{B}$ représentant f en base $\mathcal{B}$.

c. Vérifier vos résultats du a. et b. en testant la validité de la formule $[f(v)]_\mathcal{B} = [f]_\mathcal{B}\,[v]_\mathcal{B}$.

Solution:

a. Les éléments $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ ne sont pas proportionnels (ils engendrent un plan vectoriel) et en les combinant on ne peut pas obtenir le triplet $(2, 4, -2)$ (ce triplet ne se trouve pas sur le plan vectoriel engendré par $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$). Par conséquent la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. La présence de nombreux zéros dans ses éléments rend possible la recherche "à vue" de la décomposition de $v = (x, y, z)$ sur $\mathcal{B}$. On obtient :

$$(x, y, z) = \tfrac{x}{2}(2, 4, -2) + (y - 2x)(0, 1, 0) + (z + x)(0, 0, 1).$$

En termes de coordonnées, on a donc montré que :

$$[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ y - 2x \\ z + x \end{pmatrix}.$$

b. La famille $f(\mathcal{B})$ (image de $\mathcal{B}$ par f) est obtenue en appliquant f à chaque élément de $\mathcal{B}$:

$$\underbrace{f(2, 4, -2) = (0, 0, 0)}_{(2+4+3\cdot(-2))(1,2,-1)}, \quad \underbrace{f(0, 1, 0) = (1, 2, -1)}_{(0+1+3\cdot 0)(1,2,-1)}, \quad \underbrace{f(0, 0, 1) = (3, 6, -3)}_{(0+0+3\cdot 1)(1,2,-1)}$$

On obtient alors les décompositions suivantes :

$$\begin{cases} f(2, 4, -2) = 0(2, 4, -2) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ f(0, 1, 0) = \frac{1}{2}(2, 4, -2) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \\ f(0, 0, 1) = \frac{3}{2}(2, 4, -2) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1) \end{cases}$$

La matrice $[f]_\mathcal{B}$ représentant f en base $\mathcal{B}$ contient les coefficients trouvés dans ces décompositions écrits en colonnes (c'est la matrice "$[f(\mathcal{B})]_\mathcal{B}$", dont les colonnes sont les coordonnées des éléments de $f(\mathcal{B})$ en base $\mathcal{B}$). On obtient :

$$[f]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Calculons $[f(v)]_\mathcal{B}$ en décomposant $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$f(x, y, z) = (x + y + 3z)(1, 2, -1) = \tfrac{1}{2}(x + y + 3z)(2, 4, -2) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1).$$

On en déduit :

$$[f(v)]_\mathcal{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + y + 3z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après les résultats du a. et du b., on trouve aussi :

$$[f]_\mathcal{B}[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ y - 2x \\ z + x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y - 2x + 3(z + x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + y + 3z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La formule donnée dans l'énoncé est donc bien vérifiée ici.

Exercice 3. On donne la base $\mathcal{B} = (2, 5), (1, 6)$ de $\mathbb{R}^2$ ainsi que l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall v = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ [f(v)]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -x \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}$, où on note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. *Indication : aucun calcul n'est nécessaire.*

b. Calculer la matrice $[f]_\mathcal{B}$ et déterminer la famille $f(\mathcal{B})$.

c. Calculer $f(v)$ et en déduire la matrice $[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$.

Solution:

a. Réécrivons la formule pour f de la manière suivante :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} [v]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} .$$

Sous cette forme, on voit que la matrice qui est apparue est celle qui convertit les coordonnées canoniques de v en les coordonnées en base $\mathcal{B}$ de son image $f(v)$. Il s'agit donc de la matrice recherchée :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

b. Notons $\mathcal{B} = v_1, v_2$ avec $v_1 = (2,5)$ et $v_2 = (1,6)$. On sait que les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ sont alors :

$$[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2+3\cdot 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f(v_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+3\cdot 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

En mettant ces deux colonnes côte-à-côte on obtient alors :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 17 & 19 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Pour déterminer la famille $f(\mathcal{B})$ (image de $\mathcal{B}$ par f) il faut appliquer f à chaque élément de $\mathcal{B}$. Or on connait déjà les coordonnées en base $\mathcal{B}$ de $f(v_1)$ et $f(v_2)$. On trouve alors :

$$f(v_1) = 17v_1 - 2v_2 = 17(2,5) - 2(1,6) = (32,73) \quad \text{et} \quad f(v_2) = 19v_1 - v_2 = 19(2,5) - (1,6) = (37,89) .$$

c. On connait $f(v)$ par ses coordonnées en base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire les coefficients qui interviennent dans la décomposition de $f(v)$ sur la base $\mathcal{B}$. Par conséquent :

$$f(v) = (x+3y)v_1 - xv_2 = (x+3y)(2,5) - x(1,6) = (2x+6y, 5x+15y) - (x, 6x) = (x+6y, -x+15y) .$$

La matrice de f en base canonique est donc :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 15 \end{pmatrix} .$$

Remarque : on peut vérifier nos résultats par exemple en explicitant le lien qui existe entre les trois matrices calculées dans l'exercice. On sait en effet que si l'on note P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$, à savoir :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

alors on a :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \quad \text{et} \quad [f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}P = [f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}}P .$$

Exercice 4. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (x+3y-5z, -2x-6y+10z, 4x+12y-20z).$$

a. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. Calculer la matrice B obtenue à partir de A par la suite d'opérations élémentaires :

$$C_3 \leftarrow C_3 + 5C_1\,,\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\,,\ C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1\,,\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1\,.$$

c. Déterminer deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = B\,.$$

Indication : utiliser des matrices élémentaires.

Solution: On note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

a. Il s'agit de la matrice :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -6 & 10 \\ 4 & 12 & -20 \end{pmatrix} .$$

b. Appliquons les opérations élémentaires données à la matrice A. On trouve successivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -2 & -6 & 10 \\ 4 & 12 & -20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. Appelons P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$ et Q celle de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}'$. On cherche donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = B \quad \text{ou encore} \quad Q^{-1}AP = B\,.$$

Pour cela, reprenons la liste de matrices écrite ci-dessus. On sait qu'elle correspond à des multiplications successives par des matrices élémentaires (à gauche pour les lignes, à droite pour les colonnes) :

$$A,\ AE_1,\ E_2AE_1,\ E_2AE_1E_3,\ B = E_4E_2AE_1E_3$$

avec :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(rappel : pour trouver la matrice élémentaire correspondant à une opération, on effectue simplement cette opération sur la matrice identité I_3). En posant alors :

$$P = E_1E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = E_4E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on voit que la relation désirée est bien vérifiée. On peut donc déjà poser :

$$\mathcal{B} = (1,0,0), (-3,1,0), (5,0,1)\,.$$

Pour identifier $\mathcal{B}'$, procédons au calcul de l'inverse de la matrice E_4E_2. Comme on sait, il y a plusieurs méthodes pour cela. L'une d'entre elles consiste à résoudre le système linéaire 3×3 général de matrice E_4E_2 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4E_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ 2x + y = b \\ -4x + z = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a \\ y = b - 2a \\ z = 4a + c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On peut donc prendre :

$$\mathcal{B}' = (1,-2,4), (0,1,0), (0,0,1)\,.$$

Exercice 5. On donne la base $\mathcal{B} = (1,2), (2,-3)$ de $\mathbb{R}^2$, ainsi que l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \tfrac{1}{7}(3x + 2y, 6x + 4y).$$

a. Déterminer la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$.

b. Ecrire l'expression analytique de f en base $\mathcal{B}$ et interpréter géométriquement.

Solution:

a. Soit $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On note P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$ et :

$$A = [f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

On sait alors que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Donnons-nous un un vecteur quelconque v de $\mathbb{R}^2$ et notons :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}.$$

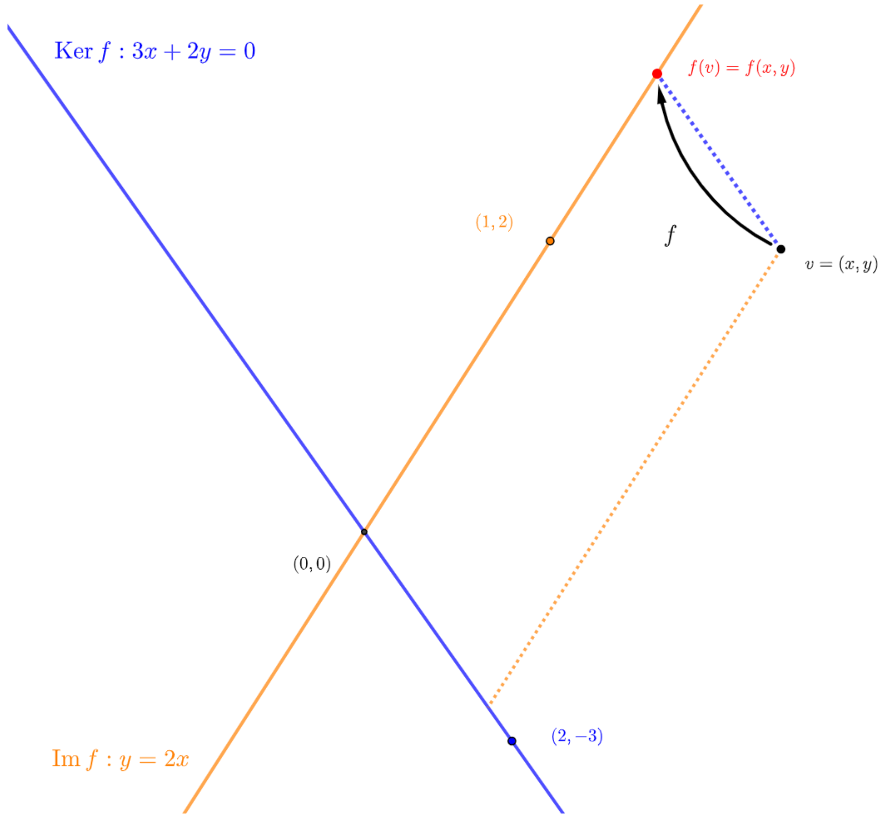
D'après le résultat trouvé au a., on a :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'application f s'exprime de la manière suivante en base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} t_1' = t_1 \\ t_2' = 0\,. \end{cases}$$

Quand on applique f, la première coordonnée de v en base $\mathcal{B}$ est préservée tandis que la deuxième est changée en 0. Géométriquement, on voit donc que $f(v)$ est le projeté de v sur la droite vectorielle engendrée par $(1,2)$ (d'équation $y = 2x$) parallèlement à celle engendrée par $(2,-3)$ (d'équation $3x + 2y = 0$).



Remarque : on aurait aussi pu identifier la nature géométrique de f en observant qu'elle est de rang 1 et de trace 1. Il s'agit donc bien d'une projection, et pour trouver ses axes, on peut décomposer la matrice A en un produit colonne-ligne :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. On donne l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \mathcal{B} = (11,-29),(20,31) \\ \mathcal{B}' = (3,-5,1),(2,0,3),(4,7,2). \end{cases}$$

On ne demande pas de vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

a. Quel est le rang de f ? b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$. c. Donner une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Im} f$.

Solution: Notons :

$$\underbrace{v_1 = (11,-29),\ v_2 = (20,31)}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \underbrace{v_1' = (3,-5,1),\ v_2' = (2,0,3),\ v_3' = (4,7,2)}_{\mathcal{B}'}.$$

a. De manière générale, on sait que le rang de f est égal à celui de toute matrice qui la représente (indépendamment du choix des bases utilisées). En particulier le rang de f est celui de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Or cette matrice est non nulle et ses deux colonnes sont proportionnelles (facteur -2 pour passer de la première à la deuxième). Elle est donc de rang 1, si bien que f est également de rang 1.

b. La relation de proportionnalité observée au a. permet d'écrire :

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De cette égalité matricielle on peut alors déduire que l'élément v de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ou, autrement dit,} \qquad v = 2v_1 + v_2 = (42, -27).$$

est dans le noyau de f. En effet, pour cet élément v on obtient :

$$[f(v)]_{\mathcal{B}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[v]_{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(v) = (0,0,0)}_{v \in \operatorname{Ker} f}.$$

D'après le a. on sait aussi que f est de rang 1, si bien que $\operatorname{Ker} f$ est de dimension $2 - 1 = 1$: c'est une droite vectorielle. On voit donc que $(42, -27)$ en est une base.

Remarque : attention de ne pas déduire de l'égalité matricielle ci-dessus que $(2, 1)$ est dans le noyau de f, comme ce serait le cas si f était l'application :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (2x - 4y, -3x + 6y, x - 2y).$$

c. Rappelons que la matrice représentative de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ contient dans ses colonnes les coordonnées des éléments de $f(\mathcal{B})$ en base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, on a :

$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1' - 3v_2' + v_3' = 2(3, -5, 1) - 3(2, 0, 3) + (4, 7, 2) = (4, -3, -5) \\ f(v_2) = -4v_1' + 6v_2' - 2v_3' = -4(3, -5, 1) + 6(2, 0, 3) - 2(4, 7, 2) = (-8, 6, 10). \end{cases}$$

Ces deux éléments appartiennent à $\operatorname{Im} f$ (puisqu'ils sont "produits" par f). Par ailleurs, on sait d'après le a. que f est de rang 1, si bien que $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. On en déduit qu'elle admet pour équations :

$$\operatorname{Im} f : \frac{x}{4} = -\frac{y}{3} = -\frac{z}{5}.$$

Remarque : comme ci-dessus, attention de ne pas déduire de la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ que $(2, -3, 1)$ et $(-4, 6, -2)$ appartiennent à l'image de f, comme ce serait le cas si f était l'application :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (2x - 4y, -3x + 6y, x - 2y).$$

Ce sont plutôt ici les éléments de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées en base $\mathcal{B}'$ (et non en base canonique) sont :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

qui se trouvent dans l'image de f.

Exercice 7. On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ainsi qu'une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. On suppose que f est inversible.

a. Montrer que la famille $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour tout élément v de $\mathbb{R}^3$, calculer aussi $[f(v)]_{f(\mathcal{B})}$ en fonction de $[v]_{\mathcal{B}}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

b. $[f]_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})} = I_3$ c. $[f]_{f(\mathcal{B})} = [f]_{\mathcal{B}}$ d. $[f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}} = [f \circ f]_{\mathcal{B}}$.

Solution:

a. Notons :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3 \quad \text{et} \quad f(\mathcal{B}) = v_1', v_2', v_3', \quad \text{où} \quad v_1' = f(v_1),\ v_2' = f(v_2) \text{ et } v_3' = f(v_3).$$

Pour voir que $f(\mathcal{B})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ montrons par exemple que :

$$\operatorname{Vect}(v_1', v_2', v_3') = \mathbb{R}^3.$$

Donnons-nous un élément w de $\mathbb{R}^3$ et cherchons à prouver qu'il peut s'écrire comme une combinaison linéaire de v_1', v_2' et v_3'. Pour cela, considérons $v = f^{-1}(w)$ l'unique antécédent de w par f (ou, ce qui revient au même, l'image de w par l'application inverse f^{-1}) et décomposons-le sur la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3.$$

En appliquant f on obtient alors, puisque celle-ci est linéaire :

$$w = f(v) = f(t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3) = t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2) + t_3 f(v_3) = t_1 v_1' + t_2 v_2' + t_3 v_3'.$$

Ceci achève de montrer que tout élément de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire des 3 éléments de la famille $f(\mathcal{B})$, si bien que celle-ci est bien une base de $\mathbb{R}^3$. En plus, nous avons établi que les coordonnées de $w = f(v)$ dans la base $f(\mathcal{B})$ sont égales à celles de v dans la base $\mathcal{B}$:

$$[f(v)]_{f(\mathcal{B})} = [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}.$$

b. Les colonnes de la matrice $[f]_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})}$ sont les coordonnnées de $f(v_1), f(v_2)$ et $f(v_3)$ dans la base $f(\mathcal{B})$. On trouve :

$$[f(v_1)]_{f(\mathcal{B})} = \underbrace{[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{car } v_1 = 1v_1 + 0v_2 + 0v_3}, \ [f(v_2)]_{f(\mathcal{B})} = \underbrace{[v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{car } v_2 = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3}, \ [f(v_3)]_{f(\mathcal{B})} = \underbrace{[v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{car } v_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3}.$$

En mettant côte-à-côte ces colonnes on trouve maintenant :

$$[f]_{\mathcal{B},f(\mathcal{B})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

L'affirmation proposée est donc vraie.

c. Les colonnes de la matrice $[f]_{f(\mathcal{B})}$ sont les coordonnnées de $f(v_1'), f(v_2')$ et $f(v_3')$ dans la base $f(\mathcal{B})$. Par exemple :

$$\underbrace{[f(v_1')]_{f(\mathcal{B})}}_{\text{première colonne de } [f]_{f(\mathcal{B})}} = [v_1']_{\mathcal{B}} = [f(v_1)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[v_1]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[f]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{première colonne de } [f]_{\mathcal{B}}}.$$

En raisonnant de même pour la deuxième et la troisième colonne, on voit que les colonnes $[f]_{f(\mathcal{B})}$ et $[f]_{\mathcal{B}}$ sont les mêmes. Autrement dit, ces deux matrices sont égales. L'affirmation proposée est donc vraie.

d. Les colonnes de la matrice $[f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}}$ sont les coordonnées de $f(v_1'), f(v_2')$ et $f(v_3')$ dans la base $\mathcal{B}$. Par exemple :

$$\underbrace{[f(v_1')]_{\mathcal{B}}}_{\text{première colonne de } [f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}}} = [f(f(v_1))]_{\mathcal{B}} = [(f \circ f)(v_1)]_{\mathcal{B}} = [f \circ f]_{\mathcal{B}}[v_1]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[f \circ f]_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{première colonne de } [f \circ f]_{\mathcal{B}}}.$$

En raisonnant de même pour la deuxième et la troisième colonne, on voit que les colonnes $[f]_{f(\mathcal{B}),\mathcal{B}}$ et $[f \circ f]_{\mathcal{B}}$ sont les mêmes. Autrement dit, ces deux matrices sont égales. L'affirmation proposée est donc vraie.