Série 9

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z, \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{4}z, \tfrac{3}{4}y + \tfrac{3}{4}z).$$

a. Montrer que f est une projection et décrire les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ de $\mathbb{R}^3$.

b. Quel est l'ensemble $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ formé des éléments de $\mathbb{R}^3$ fixés par f ?

c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x, y, z) et son image $f(x, y, z)$ par f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On peut alors constater que A est de rang 1 et de trace 1, si bien que f est une projection. Pour voir cela on aurait aussi pu (mais c'est un peu plus long !) montrer que A est égale à son carré :

$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

La décomposition :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

permet alors de donner les descriptions suivantes de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((-2, 1, 3)) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} f : y + z = 0.$$

L'application f est la projection sur la droite vectorielle $\operatorname{Vect}((-2, 1, 3))$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $y + z = 0$.

b. Comme f est une projection, on sait que l'ensemble de ses points fixes est exactement $\operatorname{Im} f$. Autrement dit :

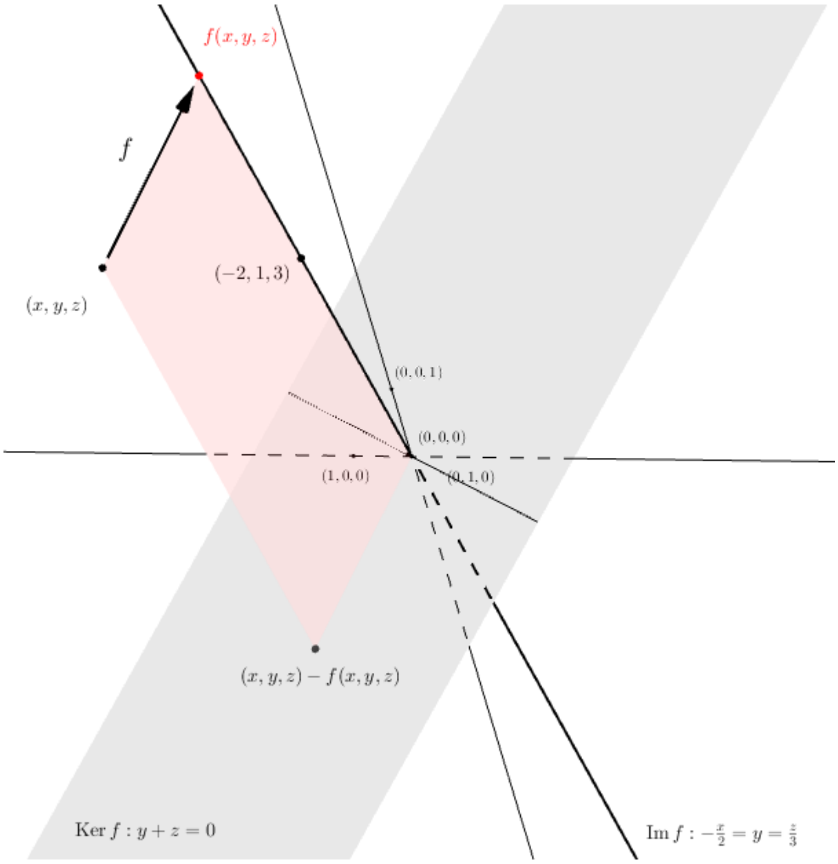
$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((-2, 1, 3)).$$

On aurait aussi pu retrouver ce résultat en recherchant directement les triplets fixés par f :

$$f(x,y,z) = (x,y,z) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}z = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}z = \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}y = \frac{1}{4}z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = x \\ z = 3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y \\ z = 3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = (-2y, y, 3y) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = y(-2,1,3).$$

c. Voici une figure représentant l'application étudiée dans cet exercice :



Le parallélogramme que l'on a fait apparaitre sur le dessin correspond géométriquement au fait que tout triplet (x,y,z) s'écrit comme la somme d'un triplet fixé par f (c'est-à-dire un multiple scalaire de $(-2,1,3)$) et d'un triplet annulé par f (c'est-à-dire appartenant au plan vectoriel $y+z=0$) :

$$(x,y,z) = \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{point fixe de } f} + \underbrace{(x,y,z)-f(x,y,z)}_{\text{point envoyé sur (0,0,0) par } f}.$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \tfrac{1}{7}(-8x+3y, -5x+8y).$$

a. Quelle est la nature géométrique de f ?
b. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ de $\mathbb{R}^2$.
c. Représenter sur un croquis les éléments caractéristiques de f ainsi qu'un point (x,y) et son image $f(x,y)$ par f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct montre alors que :

$$A^2 = \tfrac{1}{49}\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} = I_2.$$

On peut donc conclure que f est une symétrie.

b. Les sous-espaces vectoriels demandés jouent un rôle particulier pour f. En effet, f étant une symétrie, on sait que c'est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ (points fixes de f) parallèlement à $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ (points "renversés" par f autour de l'origine). Pour identifier ces sous-espaces, on peut poser :

$$g = \tfrac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} + f),$$

puisqu'on sait alors que g est une projection et que :

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}).$$

Calculons la matrice B de g en base canonique. On obtient :

$$B = \tfrac{1}{2}(I_2 + A) = \tfrac{1}{2}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}) = \tfrac{1}{14}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 15 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que :

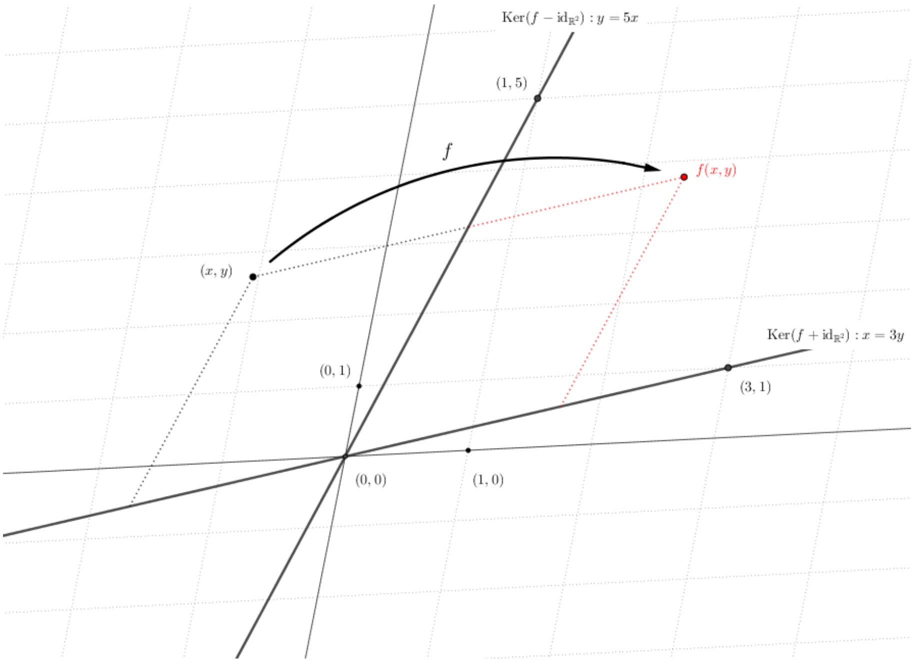
$$\underbrace{\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Vect}((1,5))}_{\text{droite vectorielle d'équation } y=5x} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : -x + 3y = 0.$$

Une autre méthode pour identifier ces sous-espaces consiste à résoudre les systèmes linéaires correspondant :

$$\underbrace{f(x,y) = (x,y)}_{\text{point fixe de } f} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{8}{7}x + \frac{3}{7}y = x \\ -\frac{5}{7}x + \frac{8}{7}y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{7}y = \frac{15}{7}x \\ -\frac{5}{7}x = -\frac{1}{7}y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y = 5x$$

$$\underbrace{f(x,y) = -(x,y)}_{\text{point "renversé" par } f} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{8}{7}x + \frac{3}{7}y = -x \\ -\frac{5}{7}x + \frac{8}{7}y = -y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{7}y = \frac{1}{7}x \\ -\frac{5}{7}x = -\frac{15}{7}y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3y.$$

c. D'après le travail effectué au a. et au b. on sait que l'application f est la symétrie par rapport à la droite vectorielle d'équation $y = 5x$ parallèlement à celle d'équation $x = 3y$. Voici une figure qui la représente :



Sur le dessin on voit apparaitre (x, y) comme la somme d'un couple fixé par f (c'est-à-dire appartenant à la droite vectorielle d'équation $y = 5x$) et d'un couple "renversé" par f (c'est-à-dire appartenant à la droite vectorielle d'équation $x = 3y$) :

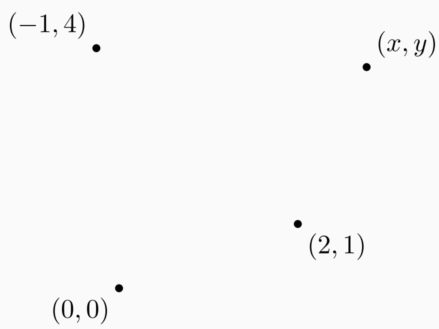
$$(x,y) = \underbrace{\tfrac{1}{2}((x,y) + f(x,y))}_{\text{point fixe de } f} + \underbrace{\tfrac{1}{2}((x,y) - f(x,y))}_{\text{point "renversé" par } f}.$$

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \tfrac{1}{9}(16x + 4y, 8x + 2y).$$

a. Quel est le rang de f ? Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

b. Après avoir calculé la trace de f, placer $f(x, y)$ sur le dessin ci-dessous.



Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

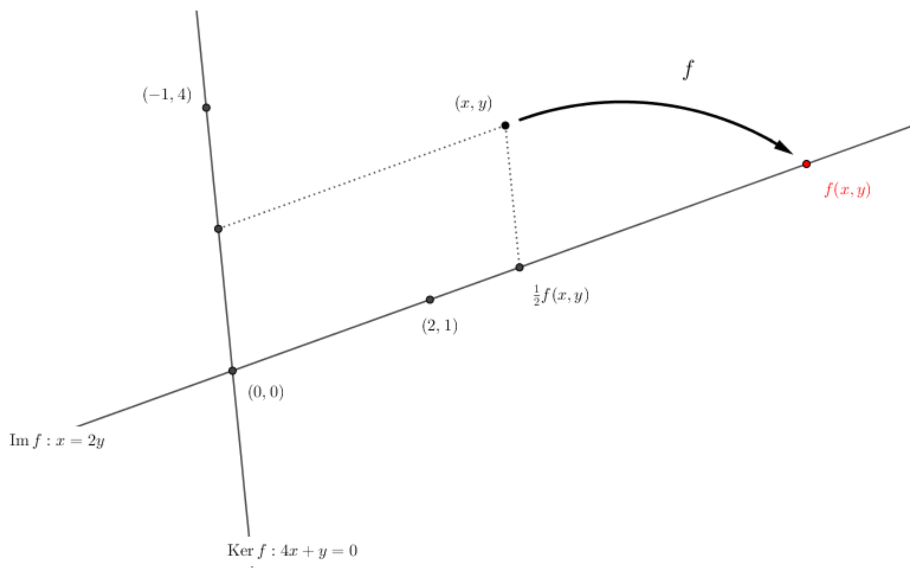
De cette décomposition colonne-ligne on déduit alors que f est de rang 1 et que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2,1)) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1,-4)).}_{\text{droite vectorielle d'équation } 8x+2y=0}$$

b. Un calcul direct donne :

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A = \frac{16}{9} + \frac{2}{9} = \frac{18}{9} = 2.$$

On sait alors que $\frac{1}{2}f$ est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. Pour placer $f(x,y)$ sur le dessin on peut donc procéder en deux temps : on commence par projeter (x,y) sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$, puis on applique l'homothétie de centre $(0,0)$ et de rapport 2 au résultat obtenu.



Exercice 4. Déterminer l'expression de la projection :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

sur le plan vectoriel d'équation $x - y + 3z = 0$ parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $(1,-2,4)$.

Solution: Notons A la matrice de f en base canonique. Posons aussi :

$$g = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3} - f.$$

On sait que g est la projection sur $\operatorname{Vect}((1,-2,4))$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $x-y+3z=0$. Par conséquent, on a :

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}((1,-2,4)), \quad \operatorname{Ker} g : x - y + 3z = 0, \qquad \underbrace{\operatorname{tr} g = 1.}_{\text{car } g \text{ projection de rang 1}}$$

Notant B la matrice de g en base canonique, on trouve alors :

$$B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

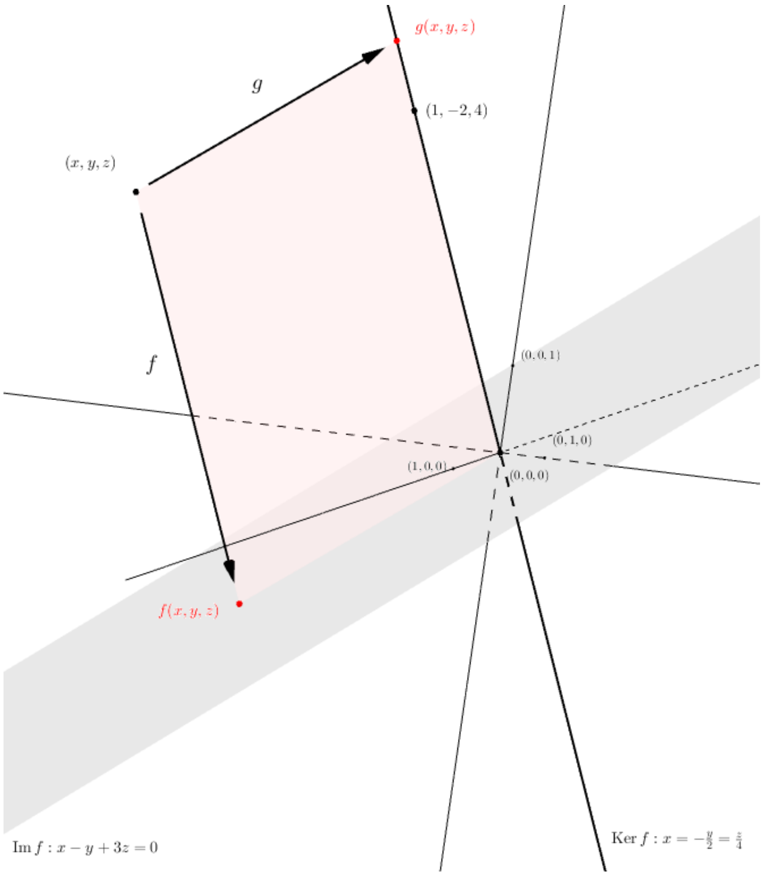
Comme $B = I_3 - A$, on obtient maintenant :

$$A = I_3 - B = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 1 & -3 \\ 2 & 13 & 6 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on trouve l'expression suivante pour f :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to \tfrac{1}{15}(14x + y - 3z, 2x + 13y + 6z, -4x + 4y + 3z).$$

Ce n'est pas demandé, mais terminons avec un dessin représentant la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 5. Déterminer l'expression de la symétrie :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

par rapport à la droite vectorielle d'équation $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = -z$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $3x + 4y + z = 0$.

Solution: Notons A la matrice de f en base canonique. Posons aussi :

$$g = \tfrac{1}{2}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} + f).$$

On sait que g est la projection sur la droite vectorielle d'équation $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = -z$ parallèlement au plan vectoriel d'équation $3x + 4y + z = 0$. Par conséquent, on a :

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}((5, 2, -1)), \quad \operatorname{Ker} g : 3x + 4y + z = 0, \qquad \underbrace{\operatorname{tr} g = 1.}_{\text{car } g \text{ projection de rang 1}}$$

Notant B la matrice de g en base canonique, on trouve alors :

$$B = \tfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{22}\begin{pmatrix} 15 & 20 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

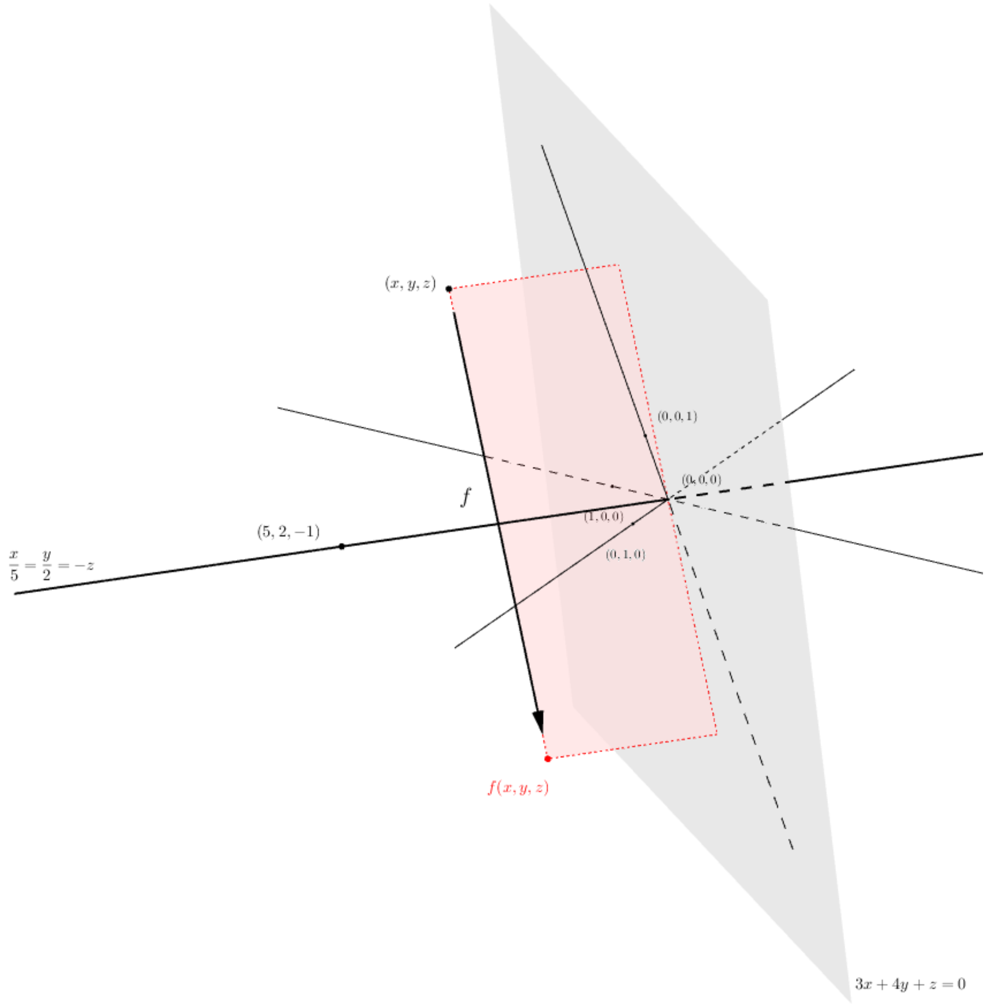
Comme $B = \frac{1}{2}(I_3 + A)$, on obtient maintenant :

$$A = 2B - I_3 = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 15 & 20 & 5 \\ 6 & 8 & 2 \\ -3 & -4 & -1 \end{pmatrix} - I_3 = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 20 & 5 \\ 6 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & -12 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on trouve l'expression suivante pour f :

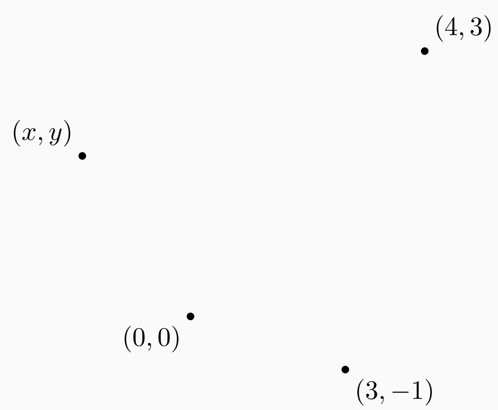
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to \tfrac{1}{11}(4x + 20y + 5z, 6x - 3y + 2z, -3x - 4y - 12z).$$

Ce n'est pas demandé, mais terminons avec un dessin représentant la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 6. Une projection $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ envoie $(4, 3)$ sur $(3, -1)$.

a. Placer $f(x, y)$ sur le dessin ci-dessous. *Indication : on pourra commencer par placer les axes de projection sur le dessin.*



b. Déterminer la valeur de $f(x, y)$ en fonction de x et y.

Solution:

a. D'après l'énoncé on sait que :

$$f(4, 3) = (3, -1).$$

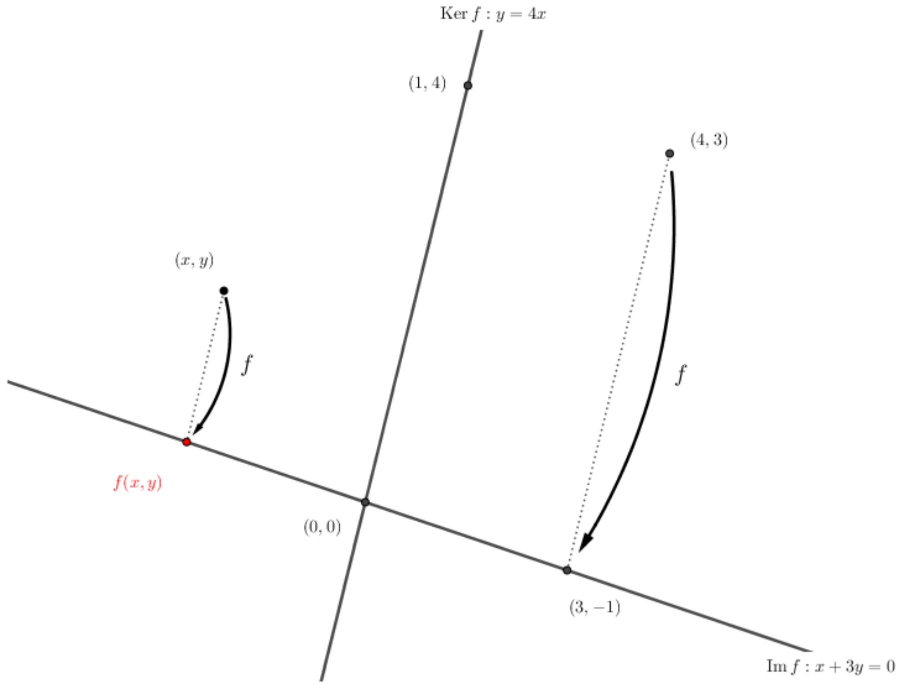
La projection f n'est donc ni l'application nulle ni l'application identité. Elle est par conséquent de rang 1 : $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont des droites vectorielles. Pour placer ces droites sur le dessin, observons que :

$$(3, -1) \in \operatorname{Im} f$$

puisque $(3, -1)$ possède un antécédent par f, à savoir $(4, 3)$. Observons aussi que :

$$(4, 3) - f(4, 3) = (4, 3) - (3, -1) = (1, 4) \in \operatorname{Ker} f$$

car lorsque l'on projette $(4,3)$ sur $(3,-1)$, on se déplace parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$. Complétons alors le dessin :



Une fois les droites vectorielles $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ placées sur le dessin, il n'y a plus qu'à projeter (x,y) sur $\mathrm{Im}\, f$ en se déplaçant parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$ pour faire apparaitre $f(x,y)$.

b. Le raisonnement effectué au a. a montré que :

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((3,-1)) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}((1,4)).}_{\text{droite vectorielle d'équation } 4x-y=0}$$

Comme f est de trace 1 (puisque c'est une projection de rang 1), on voit que sa matrice A en base canonique est :

$$A = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, on a donc trouvé l'expression suivante pour f :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \tfrac{1}{13}(12x - 3y, -4x + y).$$

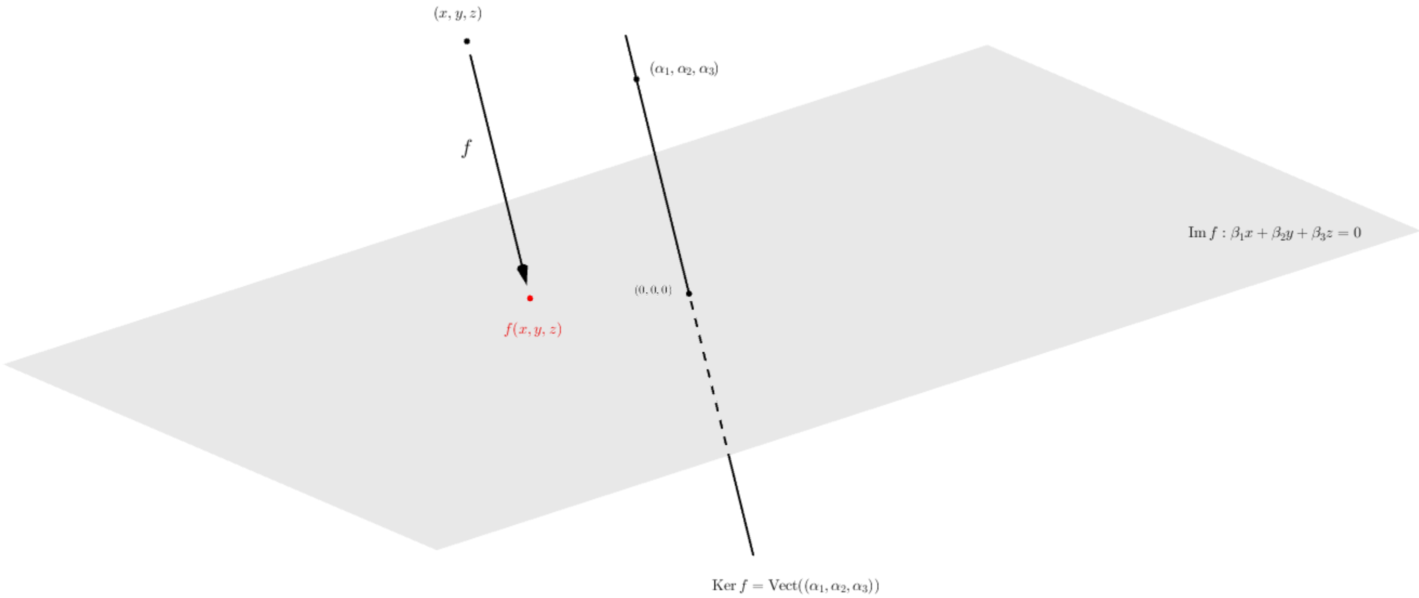
Exercice 7. Donner un exemple de projection $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 2 et qui vérifie :

a. que l'on a l'égalité $f(1,0,2) = f(3,-1,5)$.

b. en plus de la condition du a., que $f(-1,4,1) = (-1,4,1)$.

c. en plus des conditions du a. et du b., que $f^{-1}(\{(2,1,7)\}) \neq \varnothing$.

Solution: Pour résoudre cet exercice il faut avoir en tête le dessin suivant, qui représente la projection f de rang 2 "générale" dans l'espace $\mathbb{R}^3$:



Avec les notations introduites sur le dessin, la matrice A de f en base canonique est égale à :

$$A = I_3 - \frac{1}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{pmatrix}.$$

a. Les triplets $(1,0,2)$ et $(3,-1,5)$ ont la même image par f si et seulement si leur différence :

$$(3,-1,5)-(1,0,2)=(2,-1,3)$$

appartient à $\operatorname{Ker} f$. Au vu des dimensions, on peut donc affirmer que cette condition est équivalente à dire que :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((2,-1,3)).$$

Pour toute la suite de l'exercice on va donc fixer :

$$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2=-1 \text{ et } \alpha_3 = 3.$$

En prenant alors par exemple pour $\operatorname{Im} f$ le plan vectoriel d'équation $z=0$, c'est-à-dire en choisissant $\beta_1=\beta_2=0$ et $\beta_3=1$ (il faut juste faire attention à prendre un plan vectoriel qui ne contient pas $(2,-1,3)$) on obtient :

$$A = I_3 - \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'application suivante convient :

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\to(x-\tfrac{2}{3}z, y+\tfrac{1}{3}z, 0).$$

b. La condition supplémentaire que $(-1,4,1)$ est fixé par f signifie exactement que ce triplet appartient à $\operatorname{Im} f$, ou, autrement dit, que la relation suiante est satisfaite :

$$-\beta_1+4\beta_2+\beta_3=0.$$

En choisissant $\beta_1=4$, $\beta_2=1$ et $\beta_3=0$ on obtient alors :

$$A = I_3 - \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\end{pmatrix} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 4 & 8 & 0\\ -12 & -3 & 7\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, l'application suivante convient :

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\to\tfrac{1}{7}(-x-2y, 4x+8y, -12x-3y+7z).$$

c. La condition supplémentaire demande à ce que $(2,1,7)$ ait un antécédent par f, ou, autrement dit, qu'il appartienne à $\operatorname{Im} f$. Au vu du b., cela revient à demander que $\operatorname{Im} f$ soit le plan vectoriel engendré par $(-1,4,1)$ et $(2,1,7)$, c'est-à-dire le plan vectoriel d'équation :

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & x\\ 4 & 1 & y\\ 1 & 7 & z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}x - \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 7\end{vmatrix}y + \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}z = 27x+9y-9z = 9(3x+y-z)=0.$$

On voit qu'il y a donc une unique application f remplissant toutes les conditions requises, à savoir celle de matrice :

$$A = I_3 - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -9 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

en base canonique. Autrement dit l'application suivante convient (et c'est la seule) :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to \frac{1}{2}(-4x - 2y + 2z, 3x + 3y - z, -9x - 3y + 5z).$$

Exercice 8. Est-il vrai ou faux de dire que, pour toute symétrie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on a :

a. $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \cup \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$?

b. $\operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$?

c. $\det f \in \{-1, 1\}$?

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Solution:

a. C'est faux. Prenons par exemple pour f la symétrie suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (-x, y, z).$$

Pour ce choix de f on trouve :

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : x = 0 \ \text{ et } \ \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \operatorname{Vect}((1, 0, 0)).$$

Or la réunion de ces deux ensembles n'est pas égale à $\mathbb{R}^3$ tout entier : par exemple, le triplet $(1, 1, 1)$ ne se trouve ni dans l'un ni dans l'autre.

b. C'est vrai. En effet, une symétrie f est toujours inversible (elle est égale à sa propre inverse puisque $f \circ f$ est l'application identité). Par conséquent :

$$\operatorname{Ker} f = \{(0, 0, 0)\} \ \text{ et } \ \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3.$$

c. C'est vrai. En effet :

$$f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\det(f \circ f)}_{(\det f)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \det f = \pm 1.$$