Série 08

Exercice 1. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \to (x - \tfrac{1}{2}y, -2x + y, 4x - 2y).$$

a. Pour tout $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ des antécédents de w par f.

b. En utilisant le a., identifier $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

c. Même question que a. mais pour l'application $g = 2f$ au lieu de f.

Solution:

a. Pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \quad\Leftrightarrow\quad f(v) = w \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = a \\ -2x + y = b \\ 4x - 2y = c \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = a \\ -2a = b \\ 4a = c\,. \end{cases}$$

Si $b \neq -2a$ ou $c \neq 4a$, alors w ne possède aucun antécédent par f, c'est-à-dire :

$$f^{-1}(\{w\}) = \varnothing.$$

Supposons à présent que $b = -2a$ et $c = 4a$. On a alors :

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \quad\Leftrightarrow\quad x = \tfrac{1}{2}y + a \quad\Leftrightarrow\quad (x, y) = (a, 0) + y(\tfrac{1}{2}, 1).$$

Dans ce cas, l'ensemble des antécédents de w par f est donc la droite affine de $\mathbb{R}^2$ contenant $(a, 0)$ et dirigée par $(\frac{1}{2}, 1)$ (ou encore par $(1, 2)$) :

$$f^{-1}(\{w\}) = (a, 0) + \operatorname{Vect}((1, 2)).$$

b. Pour tout $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on sait que :

$$w \in \operatorname{Im} f \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{f^{-1}(\{w\}) \neq \varnothing \quad\Leftrightarrow\quad a = -\tfrac{b}{2} = \tfrac{c}{4}}_{\text{d'après a.}}.$$

Par conséquent, $\operatorname{Im} f$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $(1, -2, 4)$. Par ailleurs on sait que, lorsqu'il est non vide, l'ensemble des antécédents de w par f est parallèle à $\operatorname{Ker} f$. On peut alors déduire du a. que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(1, 2)$:

$$\operatorname{Ker} f : 2x = y.$$

c. L'application g est donnée par la formule :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \to (2x - y, -4x + 2y, 8x - 4y).$$

Pour trouver l'ensemble des antécédents de $w = (a, b, c)$ par g on peut alors raisonner exactement comme en a. par résolution d'un système linéaire. On peut aussi utiliser le travail fait sur f, en constatant que, pour tout $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$v \in g^{-1}(\{w\}) \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{g(x, y)}_{2f(x,y)} = (a, b, c) \quad\Leftrightarrow\quad f(x, y) = (\tfrac{a}{2}, \tfrac{b}{2}, \tfrac{c}{2}) \quad\Leftrightarrow\quad (x, y) \in f^{-1}(\{(\tfrac{a}{2}, \tfrac{b}{2}, \tfrac{c}{2})\}).$$

Autrement dit :

$$g^{-1}(\{w\} = f^{-1}(\{\tfrac{1}{2}w\}).$$

D'après le travail effectué au a. on voit donc maintenant que l'ensemble des antécédents de w par g est donc non vide si et seulement si :

$$\tfrac{a}{2} = -\tfrac{b}{4} = \tfrac{c}{8} \quad\Leftrightarrow\quad a = -\tfrac{b}{2} = \tfrac{c}{4}$$

Dans ce cas, il s'agit de la droite affine de $\mathbb{R}^2$ contenant $(\frac{a}{2}, 0)$ et dirigée par $(1, 2)$:

$$g^{-1}(\{w\}) = (\tfrac{1}{2}a, 0) + \operatorname{Vect}((1, 2)).$$

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (8y+12z, 2x-10y-16z, -x+7y+11z).$$

a. Pour tout $w=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ des antécédents de w par f.

b. En utilisant le a., déterminer les sous-espaces $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ de $\mathbb{R}^3$.

c. Mêmes questions a. et b. mais pour l'application $g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ au lieu de f.

Solution:

a. Pour tout $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$v\in f^{-1}(\{w\}) \quad\Leftrightarrow\quad f(v)=w \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 8y+12z=a \\ 2x-10y-16z=b \\ -x+7y+11z=c \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 8y+12z=a \\ 4y+6z=b+2c \\ -x+7y+11z=c \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \cdots$$

$$\cdots \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2(b+2c)=a \\ y=-\frac{3}{2}z+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c \\ x=7y+11z-c \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}z+\frac{7}{4}b+\frac{5}{2}c \\ y=-\frac{3}{2}z+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c \\ a-2b-4c=0\,. \end{cases}$$

Si $a\neq 2b+4c$, alors w ne possède aucun antécédent par f, c'est-à-dire :

$$f^{-1}(\{w\})=\varnothing.$$

Supposons à présent que $a=2b+4c$. On a alors :

$$v\in f^{-1}(\{w\}) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=\frac{1}{2}z+\frac{7}{4}b+\frac{5}{2}c \\ y=-\frac{3}{2}z+\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad (x,y,z)=(\tfrac{7}{4}b+\tfrac{5}{2}c, \tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{2}c, 0)+z(\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},1).$$

Dans ce cas, l'ensemble des antécédents de w par f est donc la droite affine suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$f^{-1}(\{w\})=(\tfrac{7}{4}b+\tfrac{5}{2}c, \tfrac{1}{4}b+\tfrac{1}{2}c, 0)+\mathrm{Vect}((\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{2},1)).$$

b. Pour tout $w=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on sait que :

$$w\in\operatorname{Im} f \quad\Leftrightarrow\quad \underbrace{f^{-1}(\{w\})\neq\varnothing \quad\Leftrightarrow\quad a=2b+4c}_{\text{d'après a.}}.$$

Par conséquent, $\operatorname{Im} f$ est le plan vectoriel d'équation $x-2y-4z=0$. Par ailleurs on sait que, lorsqu'il est non vide, l'ensemble des antécédents de w par f est parallèle à $\operatorname{Ker} f$. On peut alors déduire du a. que le noyau de f est la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ engendrée par $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1)$ (ou encore $(1,-3,2)$) :

$$\operatorname{Ker} f : x=-\tfrac{y}{3}=\tfrac{z}{2}.$$

Ce n'est pas demandé, mais procédons à quelques vérifications. On peut par exemple contrôler que les triplets suivants vérifient bien l'équation que l'on a trouvée pour $\operatorname{Im} f$:

$$\underbrace{f(1,0,0)=(0,2,-1)}_{0-2\cdot 2-4\cdot(-1)=0},\quad \underbrace{f(0,1,0)=(8,-10,7)}_{8-2\cdot(-10)-4\cdot 7=0},\quad \underbrace{f(0,0,1)=(12,-16,11)}_{12-2\cdot(-16)-4\cdot 11=0}.$$

On peut aussi contrôler directement que $(1,-3,2)$ est bien envoyé sur $(0,0,0)$ par f :

$$f(1,-3,2)=(8\cdot(-3)+12\cdot 2, 2-10\cdot(-3)-16\cdot 2, -1+7\cdot(-3)+11\cdot 2)=(0,0,0).$$

c. L'application g est donnée par la formule :

$$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \underbrace{(x,y,z)}_{v}\to\underbrace{(-x+8y+12z, 2x-11y-16z, -x+7y+10z)}_{f(v)-v}.$$

Pour tout $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$v\in g^{-1}(\{w\}) \quad\Leftrightarrow\quad g(v)=w \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -x+8y+12z=a \\ 2x-11y-16z=b \\ -x+7y+10z=c \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} -x+8y+12z=a \\ 5y+8z=2a+b \\ -y-2z=-a+c \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \cdots$$

$$\cdots \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x+8y+12z=a \\ -2z=2a+b+5(-a+c) \\ -y-2z=-a+c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-a+8y+12z \\ y=a-c-2z \\ z=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b-\frac{5}{2}c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=a+2b+2c \\ y=-2a+b+4c \\ z=\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b-\frac{5}{2}c\,. \end{cases}$$

On voit donc que w possède toujours un unique antécédent par g :

$$g^{-1}(\{w\})=\{(a+2b+2c,-2a+b+4c,\tfrac{3}{2}a-\tfrac{1}{2}b-\tfrac{5}{2}c)\}.$$

L'application g est inversible, on a :

$$\operatorname{Im} g=\mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} g=\{(0,0,0)\}.$$

Exercice 3. On donne une application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f(-2,3,5)=(6,3).$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire, en justifiant votre réponse, si elle est vraie ou fausse.

a. L'ensemble $f^{-1}(\{(10,5)\})$ est vide.

b. Si $f(7,1,-3)=(-4,1)$ alors $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle.

c. $(-2,3,5)$ est le seul antécédent de $(6,3)$ par f.

d. Si $f^{-1}(\{(1,2)\})$ est vide alors $f^{-1}(\{(-5,2)\})$ aussi.

Solution:

a. C'est faux. En effet, comme f respecte la multiplication scalaire, on voit que :

$$f\underbrace{(-\tfrac{10}{3},5,\tfrac{25}{3})}_{\frac{5}{3}(-2,3,5)}=\tfrac{5}{3}f(-2,3,5)=\tfrac{5}{3}(6,3)=(10,5).$$

Par conséquent l'élément $(10,5)$ de $\mathbb{R}^2$ possède (au moins) un antécédent par f : l'ensemble $f^{-1}(\{(10,5)\})$ est non vide.

b. C'est vrai. En effet, sous l'hypothèse donnée ici on a :

$$(6,3)\in\operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad (4,-1)\in\operatorname{Im} f.$$

On voit donc que $\operatorname{Im} f$ n'est pas le sous-espace nul et n'est pas non plus une droite vectorielle (puisque $(6,3)$ et $(4,-1)$ ne sont pas proportionnels). Par conséquent, f est de rang 2 :

$$\operatorname{Im} f=\mathbb{R}^2.$$

D'après le théorème du rang on sait alors que $\operatorname{Ker} f$ est de dimension $3-2=1$. C'est donc bien une droite vectorielle.

c. C'est faux. En effet, en utilisant le théorème du rang on voit que :

$$1 \underbrace{\leqslant}_{f(-2,3,5)\neq(0,0)} \operatorname{rg}(f)=\dim(\operatorname{Im} f)\underbrace{\leqslant}_{\operatorname{Im} f\subset\mathbb{R}^2} 2 \quad \Rightarrow \quad 2\geqslant\dim(\operatorname{Ker} f)=3-\operatorname{rg}(f)\geqslant 1.$$

Par conséquent, le noyau de f peut être une droite vectorielle ou un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble $f^{-1}(\{(6,3)\})$ étant non vide, on sait qu'il est parallèle à $\operatorname{Ker} f$. C'est donc géométriquement une droite ou un plan dans $\mathbb{R}^3$, mais ça ne peut être un point : $(6,3)$ possède nécessairement d'autres antécédents que $(-2,3,5)$ par f (et même une infinité).

d. C'est vrai. Si $(1,2)$ ne possède aucun antécédent par f alors $\operatorname{Im} f$ ne peut être $\mathbb{R}^2$ tout entier. Comme $(6,3)\neq(0,0)$ appartient à $\operatorname{Im} f$, on voit donc que l'on a dans ce cas :

$$\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}((6,3))=\operatorname{Vect}((2,1))=\cdots$$

Autrement dit, l'image de f est la droite vectorielle d'équation $x=2y$. Comme $(-5,2)$ n'appartient pas à cette droite, on voit qu'il ne possède aucun élément par f : l'ensemble $f^{-1}(\{(-5,2)\})$ est vide.

Exercice 4. On donne une une application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f^{-1}(\{(2,-2,4)\})=\{(1+2s+t,-1+s+t,1-s)\mid s,t\in\mathbb{R}\}.$$

a. Déterminer une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Ker} f$. Quel est le rang de f ?

b. Donner une base de $\operatorname{Im} f$.

c. Trouver l'expression de $f(x,y,z)$ en fonction de x,y et z.

Solution:

a. Commençons par poser :

$$w = (2, -2, 4)\,,\ v_0 = (1, -1, 1)\,,\ v_1 = (2, 1, -1)\ \text{ et }\ v_2 = (1, 1, 0).$$

La donnée dans l'énoncé peut alors se réécrire sous la forme :

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v_0 + sv_1 + tv_2,\ s, t \in \mathbb{R}\} = v_0 + \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$

Comme v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, on voit donc que l'ensemble des antécédents de w par f est un plan affine. On sait alors que le noyau de f est le plan vectoriel associé, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$

Il a donc pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} z = x - y + z = 0.$$

D'après le théorème du rang, on trouve alors que l'application f est de rang 1 :

$$\mathrm{rg}(f) = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{3} - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}\, f)}_{2} = 1.$$

b. Comme f est de rang 1, son image est une droite vectorielle. De plus, w possède des antécédents par f : il appartient donc à $\mathrm{Im}\, f$. Comme il est non nul, il en forme une base. On a donc :

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(\underbrace{w}_{(2,-2,4)}) = \mathrm{Vect}((1, -1, 2)) = \mathrm{Vect}((-1, 1, -2)) = \cdots$$

c. D'après les résultats trouvés au a. et b., on voit qu'en décomposant $f(x, y, z)$ sur la base $(1, -1, 2)$ de $\mathrm{Im}\, f$ on doit trouver une expression du type :

$$f(x, y, z) = \underbrace{\alpha(x - y + z)}_{\text{équation de } \mathrm{Ker}\, f}\ \underbrace{(1, -1, 2)}_{\text{base de } \mathrm{Im}\, f}.$$

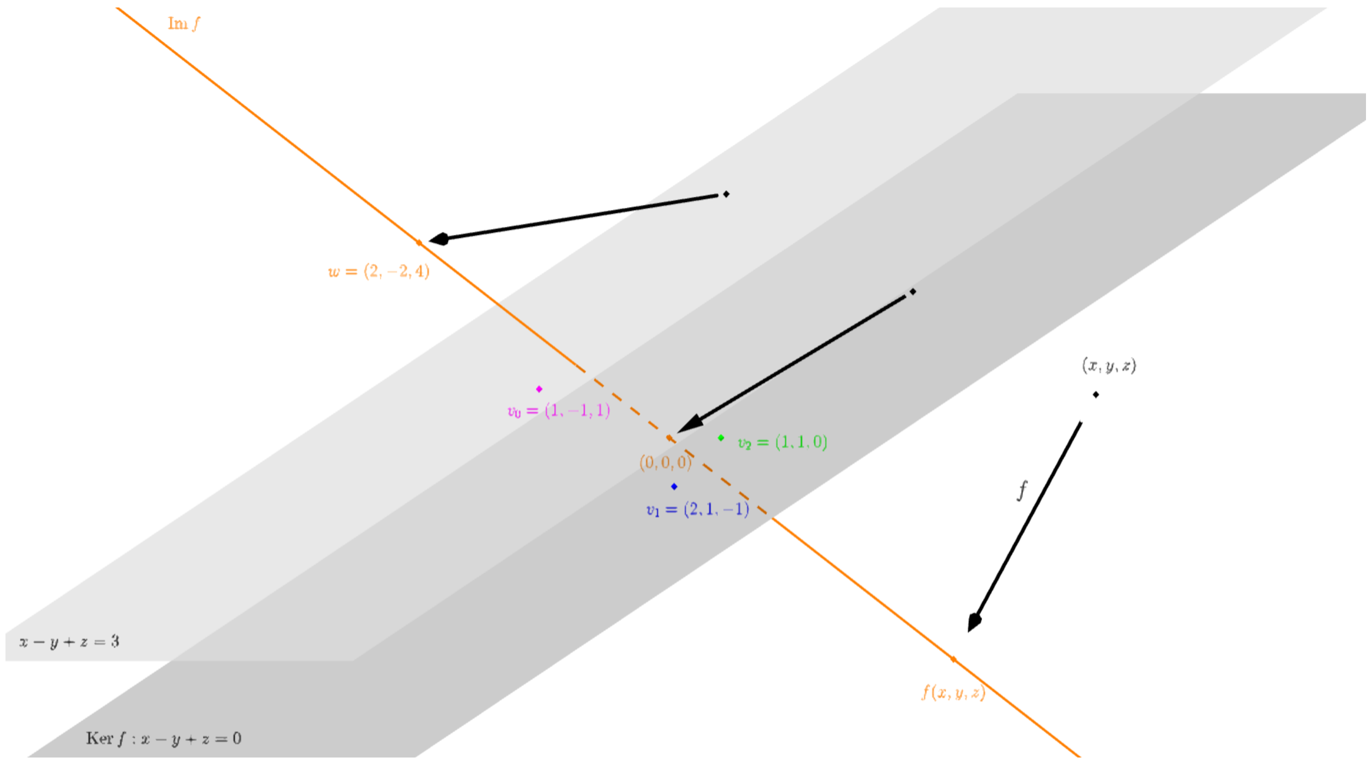
pour un certain réel α non nul. Pour trouver la valeur de α, exprimons, en utilisant l'expression ci-dessus, que v_0 est envoyé sur w par f :

$$f(v_0) = w \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{f(1, -1, 1)}_{3\alpha(1,-1,2)} = (2, -2, 4) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \tfrac{2}{3}.$$

On a donc finalement réussi à obtenir l'expression de f :

$$f(x, y, z) = \tfrac{2}{3}(x - y + z)(1, -1, 2).$$

Ce n'est pas demandé, mais représentons à présent sur un dessin la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 5. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ sachant que $(2,-4)$ n'a aucun antécédent par l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \to ((5-\alpha)x + (16-5\alpha)y + (-\alpha^2+13\alpha-31)z, (5-3\alpha)x - 2y + (\alpha^2-6\alpha+11)z).$$

Solution: L'application linéaire f a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5-\alpha & 16-5\alpha & -\alpha^2+13\alpha-31 \\ 5-3\alpha & -2 & \alpha^2-6\alpha+11 \end{pmatrix}$$

en base canonique. Si elle est de rang 2 (autrement dit si les deux lignes ne sont pas proportionnelles) alors $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, si bien que $(2,-4)$ possède automatiquement un (en fait une infinité) antécédent par f. C'est par exemple le cas si le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 5-\alpha & 16-5\alpha \\ 5-3\alpha & -2 \end{vmatrix} = (5-\alpha)\cdot(-2) - (16-5\alpha)(5-3\alpha) = -15\alpha^2 + 75\alpha - 90 = -15(\alpha^2-5\alpha+6) = -15(\alpha-2)(\alpha-3)$$

est non nul. Par conséquent, s'il y a une solution au problème posé, c'est soit $\alpha = 2$, soit $\alpha = 3$. Examinons à présent ces deux cas séparément. Tout d'abord, supposons que $\alpha = 2$, si bien que :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \to (3x+6y-9z, -x-2y+3z) = (x+2y-3z)(3,-1).$$

L'image de f est dans ce cas formée des multiples scalaires de $(3,-1)$. En particulier, le couple $(2,-4)$ n'a aucun antécédent par f. Cette valeur de α convient donc bien. Pour finir, étudions le cas où $\alpha = 3$, pour lequel on a :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \to (2x+y-z, -4x-2y+2z) = (2x+y-z)(1,-2).$$

L'image de f est ici la droite vectorielle engendrée par $(1,-2)$. Par conséquent, $(2,-4)$ possède un antécédent par f (en fait une infinité, à savoir le plan d'équation $2x+y-z=2$), si bien que cette valeur de α est à rejeter. En résumé, il y a une seule valeur de α solution du problème posé, à savoir $\alpha = 2$.

Exercice 6. Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on s'intéresse aux applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivantes :

$$f(x,y,z) = (-7x-12y+15z, 11x+16y-25z, 7x+4y-19z) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = (\alpha x - 6y - 4z, (3\alpha-2)y + \alpha^2 z, x + (\alpha-1)y + 2z).$$

a. Quel est le rang de f ?
b. Déterminer le rang de g. On discutera en fonction de la valeur de α.
c. Même question que b. mais pour $f \circ g$.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{pmatrix}.$$

Les lignes (et de même, les colonnes) de A ne sont pas deux-à-deux proportionnelles. Par conséquent, A est de rang supérieur ou égal à 2. Pour décider si elle est de rang 2 ou de rang 3, calculons son déterminant :

$$\begin{vmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 0 & -42 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 0 & -42 \\ -17 & 0 & 51 \\ 7 & 4 & -19 \end{vmatrix} = 0,$$

la première égalité étant obtenue en appliquant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$, la deuxième en appliquant $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$, et la troisième en constatant que :

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 & -42 \end{pmatrix} = 14 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -17 & 0 & 51 \end{pmatrix} = -17 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

si bien que, dans le dernier déterminant écrit, la première et la deuxième ligne sont proportionnelles. On peut en conclure que A (et donc aussi f) est de rang 2.

b. La matrice de g en base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -6 & -4 \\ 0 & 3\alpha-2 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant de B :

$$\begin{vmatrix} \alpha & -6 & -4 \\ 0 & 3\alpha-2 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha-\alpha^2-6 & -4-2\alpha \\ 0 & 3\alpha-2 & \alpha^2 \\ 1 & \alpha-1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-\alpha^2-6 & -4-2\alpha \\ 3\alpha-2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\alpha-\alpha^2-2 & -4-2\alpha \\ 3\alpha-\alpha^2-2 & \alpha^2 \end{vmatrix}$$

la première égalité étant obtenue en appliquant l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \alpha L_3$, la deuxième en développant par rapport à la troisième ligne et la troisième en appliquant $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. En observant qu'il y a maintenant le même facteur qui apparait deux fois sur la première colonne, on trouve :

$$\det B = \underbrace{(3\alpha - \alpha^2 - 2)}_{(\alpha-1)(2-\alpha)} \begin{vmatrix} 1 & -4-2\alpha \\ 1 & \alpha^2 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(2-\alpha)\underbrace{(\alpha^2+2\alpha+4)}_{(\alpha+1)^2+3>0}.$$

Discutons alors selon la valeur de α. Tout d'abord, si $\alpha \notin \{1,2\}$ on voit que g est de rang 3, car le déterminant de B est non nul. Supposons maintenant que $\alpha = 1$. On a alors :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que le déterminant de cette matrice est nul. Elle est donc de rang inférieur ou égal à 2. De plus, ses colonnes (et de même, ses lignes) ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, donc son rang est supérieur ou égal à 2. En conclusion, elle est de rang 2. Supposons alors que $\alpha = 2$. On a :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que le déterminant de cette matrice est nul. Elle est donc de rang inférieur ou égal à 2. De plus, ses colonnes (et de même, ses lignes) ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, donc son rang est supérieur ou égal à 2. En conclusion, elle est de rang 2. En résumé, on a montré que :

$$\operatorname{rg} g = \begin{cases} 3 \text{ si } \alpha \notin \{1,2\} \\ 2 \text{ si } \alpha \in \{1,2\}. \end{cases}$$

c. Utilisons les résultats trouvés au a. et au b. pour discuter du rang de $f \circ g$ en fonction de α. Tout d'abord, si $\alpha \notin \{1,2\}$ on a montré au b. que g est inversible. Dans ce cas on sait alors que $f \circ g$ et f ont le même rang. D'après le a. on voit donc que $f \circ g$ est de rang 2. Supposons à présent que $\alpha = 1$ et cherchons la matrice de $f \circ g$ en base canonique :

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 30 & 46 \\ -14 & -50 & -78 \\ -12 & -38 & -62 \end{pmatrix}.$$

On sait par avance que le rang de cette matrice est inférieur aux rangs de A et de B. Autrement dit, on sait que cette matrice est de rang inférieur ou égal à 2. De plus, le calcul ci-dessus montre que les colonnes (et de même, les lignes) de AB ne sont pas deux-à-deux proportionnelles, si bien qu'elle est de rang supérieur ou égal à 2. En conclusion, on voit que dans ce cas AB est de rang 2. Supposons alors que $\alpha = 2$ et cherchons la matrice de $f \circ g$ en base canonique :

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & -12 & 15 \\ 11 & 16 & -25 \\ 7 & 4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 10 \\ -3 & -27 & -30 \\ -5 & -45 & -50 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est visiblement non nulle et ses colonnes (ou de même, ses lignes) sont deux-à-deux proportionnelles. On en conclut que dans ce cas AB est de rang 1. En résumé :

$$\operatorname{rg}(f \circ g) = \begin{cases} 2 \text{ si } \alpha \neq 2 \\ 1 \text{ si } \alpha = 2. \end{cases}$$

Exercice 7. Déterminer une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rang 1 telle que :

$$\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Vect}((3,1,-4)), \qquad \text{où} \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (-9x+3y-6z, 6x-2y+4z, 15x-5y+10z).$$

Indication : on pourra utiliser des décompositions colonnes-lignes.

Solution: La matrice de g en base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 15 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, g est de rang 1. Elle se décompose sous la forme :

$$g(x,y,z) = (3x - y + 2z)(-3,2,5).$$

Recherchons alors via sa matrice A en base canonique une application linéaire f vérifiant les conditions de l'énoncé. Comme f est de rang 1, la matrice A doit se décomposer comme produit d'une colonne et d'une ligne :

$$A = C_1 L_1.$$

Par ailleurs, $f+g$ doit également être de rang 1, si bien que la matrice $A+B$ doit aussi se décomposer comme produit d'une colonne et d'une ligne. De plus la colonne peut être prise égale aux coordonnées de $(3,1,-4)$ en base canonique, puisque l'on sait que ce triplet forme une base de $\operatorname{Im}(f+g)$. En d'autre termes on peut écrire une décomposition du type :

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} L_2.$$

Matriciellement, le problème posé consiste donc à trouver une colonne C_1 et des lignes L_1 et L_2 telles que :

$$C_1 L_1 + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} L_2.$$

Posons alors :

$$L_1 = L_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Clairement, l'égalité matricielle ci-dessus est vérifiée :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice en base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire l'application définie par :

$$f(x,y,z) = (3x - y + 2z)(6,-1,-9)$$

est donc solution du problème posé. Elle est bien de rang 1, et l'application :

$$f+g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to (3x-y+2z)(3,1,-4)$$

a bien pour image la droite vectorielle engendrée par $(3,1,-4)$.

Exercice 8. (Facultatif) Est-il vrai ou faux de dire que, pour toutes applications linéaires $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on a :

a. $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$?

b. $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} g$?

c. $\operatorname{Ker}(f+g) \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$?

d. $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f \Rightarrow \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f$?

Solution:

a. C'est vrai. En effet :

$$v \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(v) = (0,0,0) \Rightarrow \underbrace{g(f(v))}_{(g\circ f)(v)} = g(0,0,0) = (0,0,0) \Rightarrow v \in \operatorname{Ker}(g \circ f).$$

Tout élément du noyau de f appartient donc au noyau de $g \circ f$, ce qui montre l'inclusion voulue.

b. C'est faux. En effet, prenons par exemple :

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x,y,z) \to (x,0,0) = x(1,0,0).$$

L'application linéaire g ainsi choisie est de rang 1 et son image est la droite vectorielle engendrée par $(1,0,0)$. Lorsque l'on compose par f, on obtient l'application :

$$f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x,y,z) \to f(x,0,0) = xf(1,0,0).$$

Si l'on choisit f de sorte à ce que $f(1,0,0)$ soit non proportionnel à $(1,0,0)$, on aura alors que $f \circ g$ est aussi de rang 1 et :

$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Vect}(f(1,0,0)) \not\subset \operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}((1,0,0)).$$

Prenons alors par exemple :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x,y,z) \to (0,x,0) = x(0,1,0)$$

pour laquelle $f(1,0,0) = (0,1,0)$ n'est pas proportionnel à $(1,0,0)$.

c. C'est vrai. En effet, donnons-nous un élément v de $\mathbb{R}^3$ qui est à la fois dans le noyau de $f+g$ et dans celui de g. On a donc :

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = (0,0,0) \quad \text{et} \quad g(v) = (0,0,0),$$

d'où l'on déduit par soustraction que :

$$f(v) = (0,0,0).$$

Autrement dit, v appartient au noyau de f. Ceci achève de prouver l'inclusion désirée.

d. C'est vrai. Pour le montrer, supposons que :

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f$$

et donnons-nous un élément w de $\operatorname{Im} g$. Notre but est de montrer que w appartient aussi à $\operatorname{Im} f$. Tout d'abord, on sait que w peut s'écrire sous la forme :

$$w = g(v)$$

avec $v \in \mathbb{R}^3$. Par ailleurs, l'hypothèse que :

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f$$

nous assure que l'on peut trouver un élément v' de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\underbrace{(f+g)(v) = f(v) + g(v) = f(v) + w}_{\in \operatorname{Im}(f+g)} = \underbrace{f(v')}_{\in \operatorname{Im}(f)}$$

Par linéarité de f, on voit alors que :

$$w = f(v') - f(v) = f(v' - v).$$

Ceci achève de prouver que w est élément de $\operatorname{Im} f$, puisqu'on vient de l'écrire comme l'image par f d'un élément de $\mathbb{R}^3$.