Série 7

Exercice 1. L'application f donnée est-elle linéaire ? Si oui, en donner la matrice en base canonique.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$(x, y) \to (x - y, 2x + 5y, x + y)$

b. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$(x, y, z) \to x - y + z + 1$

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$x \to (2x, 0)$.

Solution:

a. L'application f proposée est linéaire (elle a bien la forme voulue, c'est-à-dire que, dans l'expression de f, chacune des trois composantes est une combinaison linéaire de x, y et z). Elle a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en base canonique. Rappelons comment trouver cette matrice. Une première méthode consiste à créer les lignes de A en extrayant systématiquement les coefficients devant x et y dans l'expression de $f(x, y, z)$. On trouve alors les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

qui, une fois mises ensemble, donnent bien la matrice A ci-dessus. Une autre façon de s'y prendre est de chercher à exprimer $[f(x, y)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ en fonction de $[(x, y)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$. La matrice qui fait le lien entre les deux n'est autre que la matrice de f en base canonique. On trouve :

$$[f(x, y)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + 5y \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A[(x, y)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

Enfin, une autre méthode consiste à calculer la famille image par f de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, puis les coordonnées des éléments obtenus dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On trouve :

$$[f(1, 0)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = [(1, 2, 1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [f(0, 1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = [(-1, 5, 1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui ne sont autres que les colonnes de A.

b. L'application f proposée ici n'est pas linéaire. En effet, l'expression $x - y + z + 1$ n'est pas une combinaison de x, y et z. Une autre façon de se convaincre consiste à observer que f ne respecte pas les structures vectorielles. Par exemple, on a :

$$f(1, 0, 0) = 2 \quad \text{et} \quad f(-1, 0, 0) = 0$$

alors que pour une application linéaire les deux valeurs trouvées devraient être opposées (extraction du facteur -1).

c. L'application f proposée est linéaire et a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en base canonique.

Exercice 2. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (x, y) \to (x + 5y, x - 3y).$$

a. Calculer le rang de f. En déduire $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

b. L'application f est-elle inversible ? Si oui, en donner l'application inverse f^{-1}.

Solution: La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 = -8$$

Comme celui-ci est non nul, on peut conclure que A est de rang 2 (cela peut aussi se déduire du fait que les colonnes de A - ou ses lignes - ne sont pas proportionnelles). On sait alors que :

$$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}.$$

b. Comme f est de rang 2, on sait qu'elle est inversible et que l'application f^{-1} est l'application linéaire de matrice :

$$A^{-1} = \tfrac{1}{-8}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en base canonique. Elle est donc décrite par la formule :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \tfrac{1}{8}(3x+5y, x-y).$$

Exercice 3. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y, 2x+3y).$$

a. Quel est le rang de f ?

b. Décrire l'ensemble $\operatorname{Im} f$ par une équation cartésienne puis le représenter sur un dessin.

c. Même question que b. mais pour $\operatorname{Ker} f$.

Solution:

a. La matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

L'application f est de rang 1. Cela peut se voir de plusieurs façons. Une fois observé que A n'est pas nulle, on peut par exemple constater que son déterminant est nul. On peut aussi observer que ses colonnes sont proportionnelles (facteur $\frac{3}{2}$ pour passer de la première à la deuxième) ou que ses lignes le sont (facteur 6 pour passer de la première à la deuxième). On peut écrire pour A des décompositions colonne-ligne (minimales) de longueur 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \cdots$$

b. Comme f est de rang 1 on sait que $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle. N'importe quel élément non nul se trouvant dessus en donne donc une base, comme par exemple :

$$f(1,0) = (\tfrac{1}{3}, 2)\,, \quad f(0,1) = (\tfrac{1}{2}, 3)\,, \quad f(3,0) = (1,6)\,, \quad \ldots$$

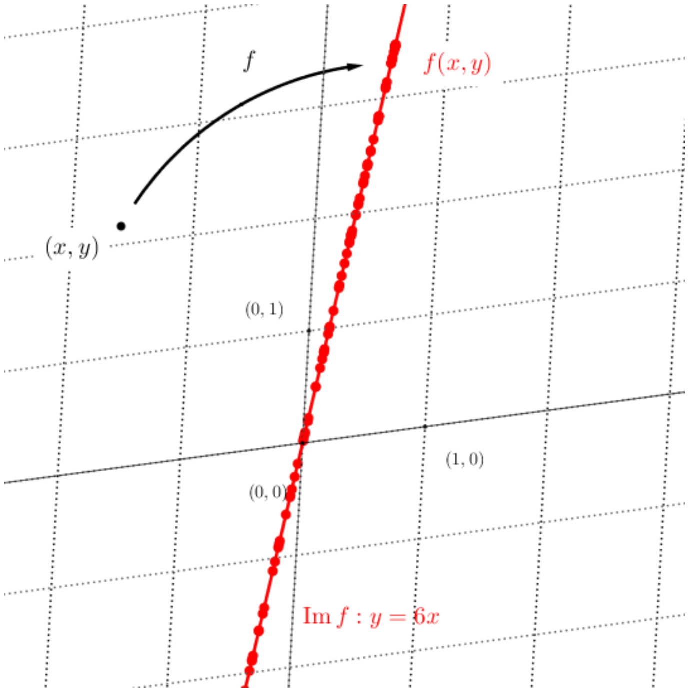
L'image de f est donc la droite vectorielle engendrée par $(1,6)$, qui a pour équation :

$$\operatorname{Im} f : y = 6x.$$

Rappelons une autre façon d'identifier cette image. Dans les décompositions colonne-ligne minimales de A écrites en a., on sait que la colonne correspond aux coordonnées canoniques d'une base de $\operatorname{Im} f$. En utilisant par exemple la première décomposition que l'on a écrite on peut alors directement affirmer que $(1,6)$ est une base de $\operatorname{Im} f$. Rappelons que cela provient de l'expression suivante pour la formule qui définit f :

$$f(x,y) = (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y)(1,6).$$

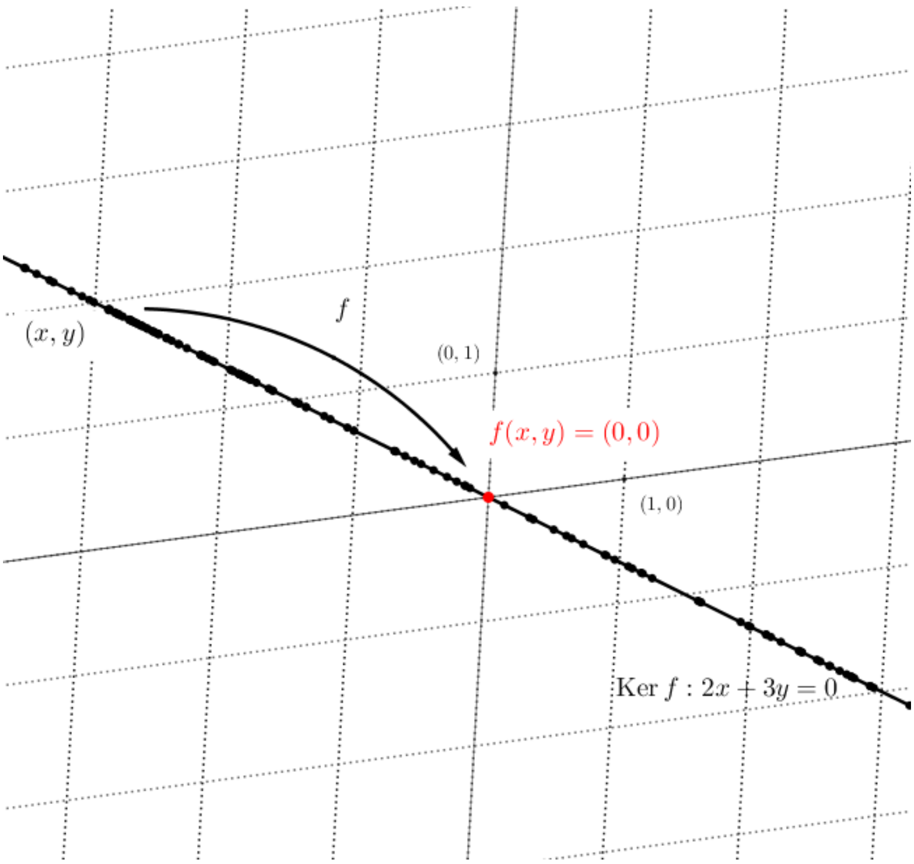
Sous cette forme, on voit bien que les éléments produits "en sortie" par f sont tous les multiples scalaires de $(1,6)$. On obtient le dessin suivant :



c. Le noyau de f est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y = 0\,,$$

l'équivalence provenant du fait que les deux équations sont proportionnelles. On trouve donc que Ker f est la droite vectorielle d'équation $2x + 3y = 0$ (qui a pour base $(3, -2)$). On obtient le dessin suivant :



Là encore, rappelons une autre méthode pour identifier directement ce noyau. Dans les décompositions colonne-ligne minimales de A écrites en a., on sait que la ligne correspond à une équation du noyau. En utilisant par exemple la deuxième décomposition écrite, on trouve directement :

$$\mathrm{Ker}\, f : 2x + 3y = 0.$$

A nouveau, cela provient directement de l'expression correspondante pour f :

$$f(x,y) = (2x+3y)(\tfrac{1}{6}, 1).$$

En effet, sous cette forme, il est clair qu'un couple (x,y) a pour image $(0,0)$ si et seulement s'il vérifie $2x + 3y = 0$.

Exercice 4. On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (2x - y + z, x + 3y + 4z, 3x + 2y + 5z).$$

a. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

b. Quel est le rang de f ? Donner une (ou des) équation(s) de $\operatorname{Im} f$.

c. Décomposer $f(x, y, z)$ dans une base de $\operatorname{Im} f$ et écrire la décomposition minimale correspondante de la matrice de f.

Solution:

a. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -7y - 7z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x,y,z) = z(-1,-1,1).$$

On voit donc que $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $(-1, -1, 1)$.

b. D'après le théorème du rang, on sait alors que l'image de f est de dimension $3 - 1 = 2$. Autrement dit, $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel. Sur ce plan se trouvent par exemple les éléments suivants :

$$f(1,0,0) = (2,1,3), \quad f(0,1,0) = (-1,3,2), \quad f(0,0,1) = (1,4,5) \quad \ldots$$

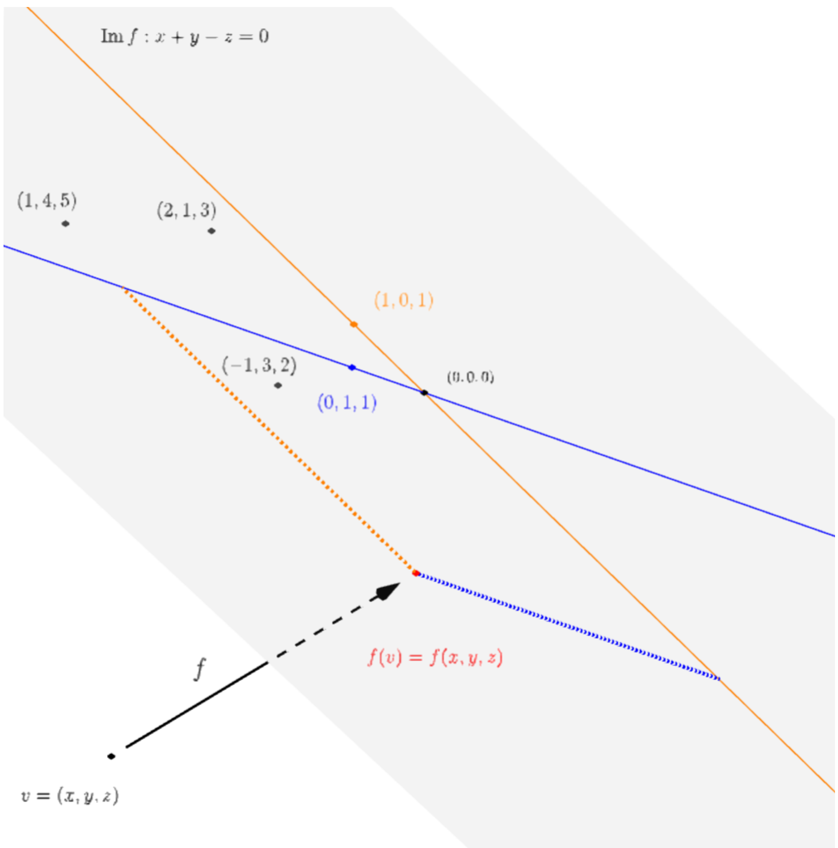
En prenant par exemple les deux premiers éléments de cette liste, on obtient une base de $\operatorname{Im} f$ (car ils ne sont pas proportionnels). Par conséquent, on voit que ce plan vectoriel admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} z = -7(x + y - z) = 0, \text{ ou encore } x + y - z = 0.$$

c. Prenons une base de $\operatorname{Im} f$ dans laquelle on va pouvoir décomposer les éléments sans trop de calculs (c'est typiquement le cas si on s'arrange pour avoir des zéros dans les triplets que l'on choisit), comme par exemple :

$$(1,0,1), (0,1,1)$$

(ces deux triplets sont solutions de $x + y - z = 0$ et ne sont pas proportionnels).



On trouve alors l'expression :

$$f(x,y,z) = (2x - y + z)(1,0,1) + (x + 3y + 4z)(0,1,1)$$

qui correspond à la décomposition colonne-ligne minimale suivante pour la matrice de f en base canonique :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer si possible une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés données. Si ce n'est pas possible, expliquer pourquoi.

a. $(1,2) \in \operatorname{Ker} f$ et $(4,2) \in \operatorname{Im} f$

b. $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ et $(4,-3) \in \operatorname{Ker} f$

c. $f(1,-1) = f(-2,1) = (1,1)$.

Indication : quel est le rang de f ?

Solution:

a. Si une telle application f existe, elle est nécessairement de rang 1, car son noyau et son image son non nuls. Par conséquent :

$$\operatorname{Ker} f : 2x - y = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2,1)).$$

La matrice de f en base canonique est donc égale à :

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

pour un certain réel α non nul. Autrement dit, f est décrite par les formules :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \alpha(2x - y)(2,1) = \alpha(4x - 2y, 2x - y).$$

Réciproquement, une application définie de cette manière vérifie bien les conditions voulues.

b. Une telle application linéaire f ne peut exister : en effet, la première condition impose que f est de rang 2. Par conséquent, son noyau doit être nul, ce qui contredit la deuxième condition. Il est donc impossible de satisfaire les deux conditions en même temps.

c. Supposons tout d'abord qu'une telle application f existe. Il est alors clair que :

$$(1,1) \in \operatorname{Im} f.$$

Par ailleurs, par linéarité de f, on a :

$$f(1,-1) - f(-2,1) = f(3,-2) = (0,0)\,, \text{ ou autrement dit } (3,-2) \in \operatorname{Ker} f.$$

En raisonnant exactement comme en a. on trouve alors que f est décrite par les formules :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \alpha(2x + 3y)(1,1) = \alpha(2x + 3y, 2x + 3y)$$

pour un certain réel α non nul. Comme $(1,-1)$ a pour image $(1,1)$ par f, on voit que α doit vérifier :

$$\underbrace{f(1,-1)}_{(1,1)} = \alpha(-1)(1,1)\,, \text{ ou autrement dit } \alpha = -1.$$

Pour cette valeur de α, on trouve par un calcul direct que l'image de $(-2,1)$ est aussi égale à $(1,1)$. On a donc montré qu'il y a une unique application satisfaisant la condition requise, à savoir :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to -(2x + 3y)(1,1) = (-2x - 3y, -2x - 3y).$$

Exercice 6. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant que :

a. $\operatorname{Im} f$ est le plan vectoriel d'équation $3x + y + 2z = 0$.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $(1,2,4) \in \operatorname{Ker} f$.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément, l'image de $(1,0,0)$ par f est $(1,1,-2)$.

Solution:

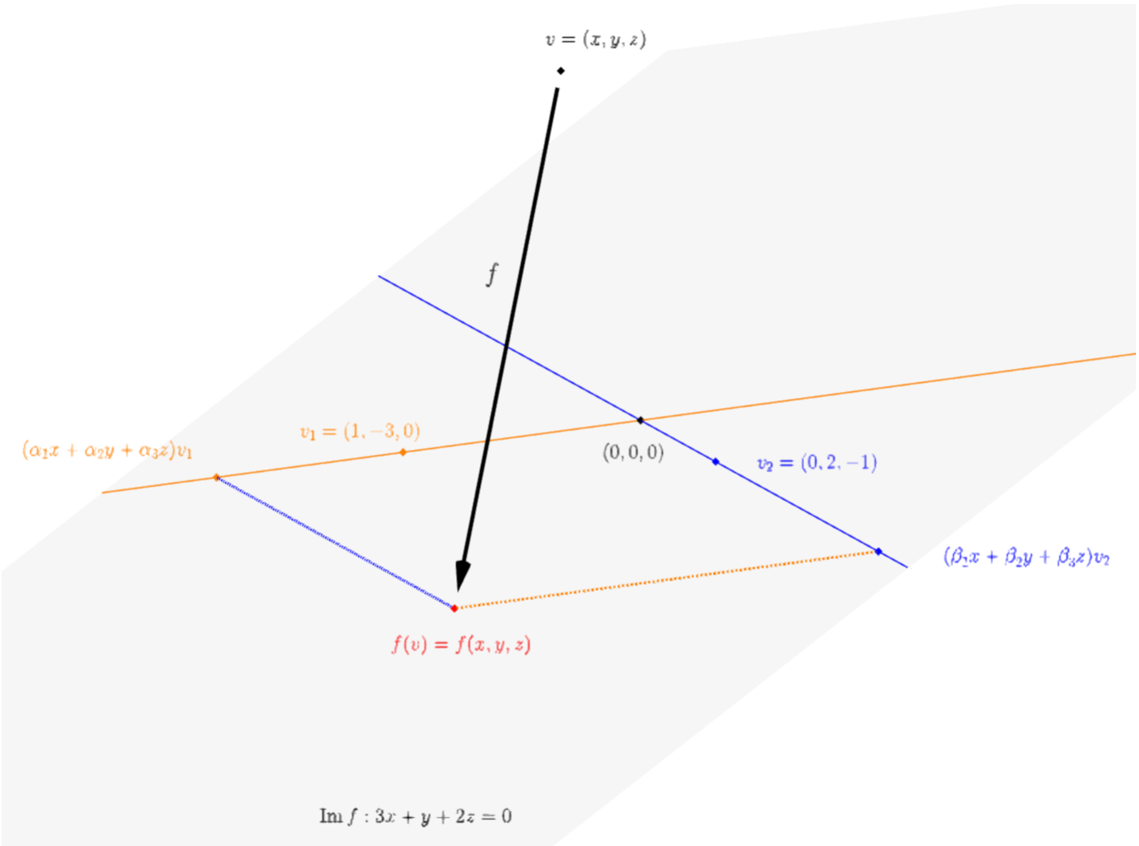
a. Le plan vectoriel proposé admet pour base :

$$\mathcal{B} = \underbrace{(1,-3,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,2,-1)}_{v_2}.$$

On sait alors que f a ce plan vectoriel pour image si et seulement si elle se décompose sous la forme suivante :

$$f(x,y,z) = (\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z)v_1 + (\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z)v_2$$

où les deux expressions en x, y, z figurant devant v_1 et v_2 (qui ne sont autres que les coordonnées de $f(x,y,z)$ dans la base $\mathcal{B}$) ne sont pas proportionnelles. Visuellement, une telle application linéaire f peut se représenter de la manière suivante :



Voici par exemple une application linéaire qui répond à la question posée :

$$f(x,y,z) = x(1,-3,0) + y(0,2,-1) = (x, -3x+2y, -y).$$

b. En reprenant les notations introduites au a., la nouvelle condition se traduit de la manière suivante :

$$(1,2,4) \in \mathrm{Ker}\, f \quad \Leftrightarrow \quad f(1,2,4) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)v_1 + (\beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3)v_2 = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + 4\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, à chaque fois que l'on a deux triplets non proportionnels $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ satisfaisant ces équations, on obtient une application solution du problème posé. Par exemple, l'application suivante convient :

$$f(x,y,z) = (2x-y)(1,-3,0) + (z-2y)(0,2,-1) = (2x-y, -6x-y+2z, 2y-z)$$

(elle correspond à $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2,-1,0)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0,-2,1)$).

c. En reprenant à nouveau les notations ci-dessus, on voit que la nouvelle condition se traduit par :

$$f(1,0,0) = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 = (1,1,-2).$$

Autrement dit, elle signifie exactement que α_1 et β_1 sont les coordonnées de $(1, 1-2)$ dans la base $\mathcal{B} = v_1, v_2$ du plan vectoriel $\mathrm{Im}\, f$. La décomposition :

$$(1, 1-2) = (1,-3,0) + 2(0,2,-1)$$

montre donc que cette condition équivaut à demander que $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 2$. Sous cette condition, le système trouvé au b. devient :

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ 2 + 2\beta_2 + 4\beta_3 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha_2 + 2\alpha_3 = -\frac{1}{2} \\ \beta_2 + 2\beta_3 = -1. \end{cases}$$

Par exemple, l'application suivante convient :

$$f(x,y,z) = (x - \tfrac{1}{2}y)(1,-3,0) + (2x+y-z)(0,2,-1) = (x - \tfrac{1}{2}y, x + \tfrac{7}{2}y - 2z, -2x - y + z)$$

(elle correspond à $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -\frac{1}{2}, 0)$ et $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2, 1, -1)$).

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f l'application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = ((1-\alpha^3)x + (1+\alpha^3)y + (-\alpha^3+\alpha+4)z, \alpha x + y + (3\alpha+2)z, -\alpha^3 x + (2+\alpha^3)y + (-\alpha^3+\alpha+3)z).$$

Trouver la valeur de α sachant que $f(1,5,-2)$ et $f(1,2,-1)$ sont proportionnels. *Indication : que peut-on dire du rang de f ?*

Solution: Commençons par observer que f ne peut être de rang 3. En effet, si f était inversible, alors, par linéarité de l'application f^{-1}, une relation de proportionnalité entre $f(1,5,-2)$ et $f(1,2,-1)$ se traduirait en une relation de proportionnalité entre :

$$f^{-1}(f(1,5,-2)) = (1,5,-2) \text{ et } f^{-1}(f(1,2,-1)) = (1,2,-1).$$

Or il est clair que les triplets $(1,5,-2)$ et $(1,2,-1)$ ne sont pas proportionnels. Calculons alors le déterminant de la matrice de f :

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha^3 & 1+\alpha^3 & -\alpha^3+\alpha+4 \\ \alpha & 1 & 3\alpha+2 \\ -\alpha^3 & 2+\alpha^3 & -\alpha^3+\alpha+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \alpha & 1 & 3\alpha+2 \\ -\alpha^3 & 2+\alpha^3 & -\alpha^3+\alpha+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 2\alpha+2 \\ -\alpha^3 & 2 & \alpha+3 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & 0 \\ -\alpha^3 & 2 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (\alpha-1)(\alpha+1),$$

la première égalité étant obtenue par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, la deuxième via les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et la troisième via l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$. A ce stade, il n'y a donc plus que deux valeurs de α candidates : 1 et -1. Examinons à présent ces deux valeurs. Pour $\alpha = 1$, on obtient :

$$f(x,y,z) = (2y+4z, x+y+5z, -x+3y+3z) \text{ et donc } f(1,5,-2) = (2,-4,8),\ f(1,2,-1) = (0,-2,2).$$

Par conséquent, $\alpha = 1$ n'est pas solution. Pour $\alpha = -1$, on obtient :

$$f(x,y,z) = (2x+4z, -x+y-z, x+y+3z) \text{ et donc } f(1,5,-2) = (-6,6,0),\ f(1,2,-1) = (-2,2,0).$$

Par conséquent, $\alpha = -1$ est solution (et c'est la seule).

Exercice 8. Déterminer, en fonction de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, le rang, le noyau et l'image de l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \to (\alpha x + \beta y + \gamma z, \gamma x + \alpha y + \beta z, \beta x + \gamma y + \alpha z).$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 8, série 2.

Solution: L'application linéaire étudiée ici a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

en base canonique. Le déterminant de cette matrice a été calculé à l'exercice 8, série 2. On a trouvé :

$$\det(A) = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)((\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\beta-\gamma)^2).$$

Supposons dans un premier temps que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et que α, β et γ ne sont pas tous les trois égaux. Dans ce cas, le déterminant de A est non nul, si bien que f est de rang 3 : $\operatorname{Ker} f$ est le sous-espace nul et $\operatorname{Im} f$ est égal à $\mathbb{R}^3$. Supposons maintenant que $\alpha = \beta = \gamma$. On a alors :

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui correspond à l'expression suivante de f :

$$f(x,y,z) = \alpha(x+y+z)(1,1,1).$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, alors f est l'application nulle, et est donc de rang nul : $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$ et $\operatorname{Im} f$ est le sous-espace nul. Si $\alpha = \beta = \gamma \neq 0$, f est de rang 1. Son noyau est le plan vectoriel d'équation $x+y+z=0$ et son image est la droite vectorielle engendrée par $(1,1,1)$. Enfin, supposons que $\alpha+\beta+\gamma = 0$. On a alors :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -\alpha-\beta \\ -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha-\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Si α et β (et donc aussi γ) sont nuls, on voit que A est la matrice nulle. Ce cas a déjà été vu précédemment : f est l'application nulle, sont noyau est $\mathbb{R}^3$ et son image est le sous-espace nul. Si α ou β est non nul, alors A est de rang 2. En effet, on a vu ci-dessus que le déterminant de A est nul, si bien que A est de rang inférieur ou égal à 2 (on peut aussi observer que la somme des colonnes de A est nulle). Par ailleurs, il est impossible que les deux premières colonnes soient proportionnelles, puisque :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha-\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)^2 + \tfrac{3}{4}\beta^2 = \tfrac{3}{4}\alpha^2 + (\tfrac{1}{2}\alpha + \beta)^2 \neq 0.$$

Ainsi, le rang de A ne peut être inférieur ou égal à 1. Il est donc bien égal à 2. Ecrivons alors une décomposition colonne-ligne minimale de A :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha-\beta \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ -\alpha-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle correspond à l'expression suivante de f :

$$f(x,y,z) = (x-z)(\alpha, -\alpha-\beta, \beta) + (y-z)(\beta, \alpha, -\alpha-\beta).$$

Le noyau de f est décrit par les équations :

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Il s'agit de la droite vectorielle engendrée par $(1,1,1)$. L'image de f est le plan vectoriel engendré par

$$(\alpha, -\alpha-\beta, \beta), (\beta, \alpha, -\alpha-\beta).$$

Il a pour équation $x+y+z=0$ (car les deux éléments ci-dessus satisfont cette équation).