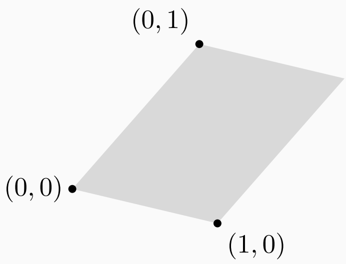
# Série 06

**Exercice 1.** On fixe le repère suivant du plan, où le parallélogramme en gris est d'aire 2.




Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire orientée de la famille $v_1, v_2$ donnée :

a. $v_1 = (-4,0), v_2 = (0,1)$ b. $v_1 = (2,3), v_2 = (0,-1)$ c. $v_1 = (1,2), v_2 = (2,4)$.

On demande de raisonner à chaque fois de deux façons : d'abord en utilisant la formule avec le déterminant, puis en expliquant à l'aide d'un dessin le lien géométrique entre le parallélogramme construit sur $v_1, v_2$ et celui construit sur la base canonique.

Solution: Notons les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ par :

$$e_1 = (1,0) \quad \text{et} \quad e_2 = (0,1).$$

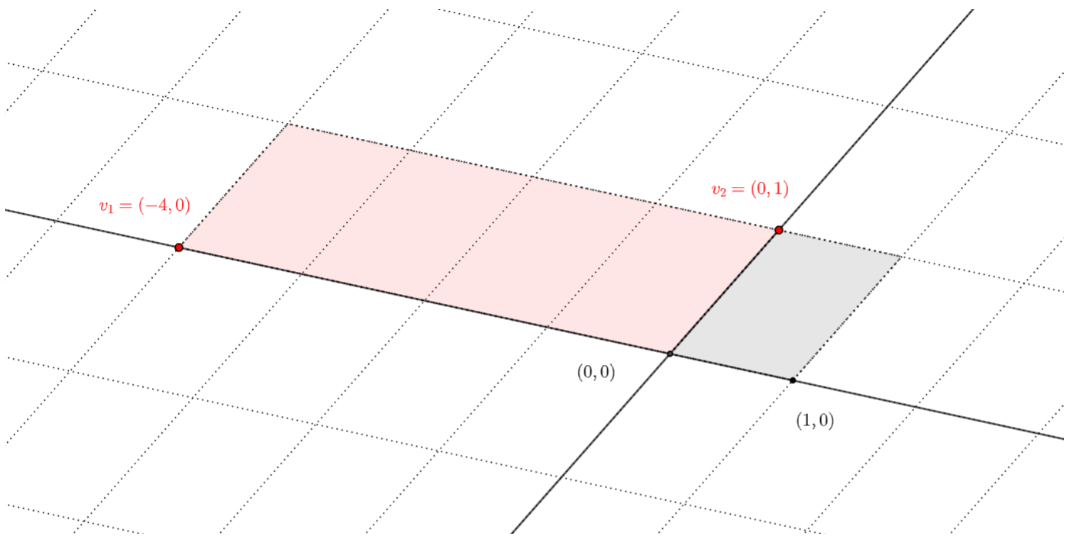
Le parallélogramme construit sur $e_1, e_2$ est orienté directement et d'aire 2. On a donc :

$$\sigma(e_1, e_2) = 2.$$

a. En appliquant la formule vue au cours on obtient :

$$\begin{cases} v_1 = -4e_1 \\ v_2 = e_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sigma(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \sigma(e_1, e_2) = -4 = -8.$$

Plaçons maintenant $v_1$ et $v_2$ dans le plan et construisons (en rouge) le parallélogramme correspondant :

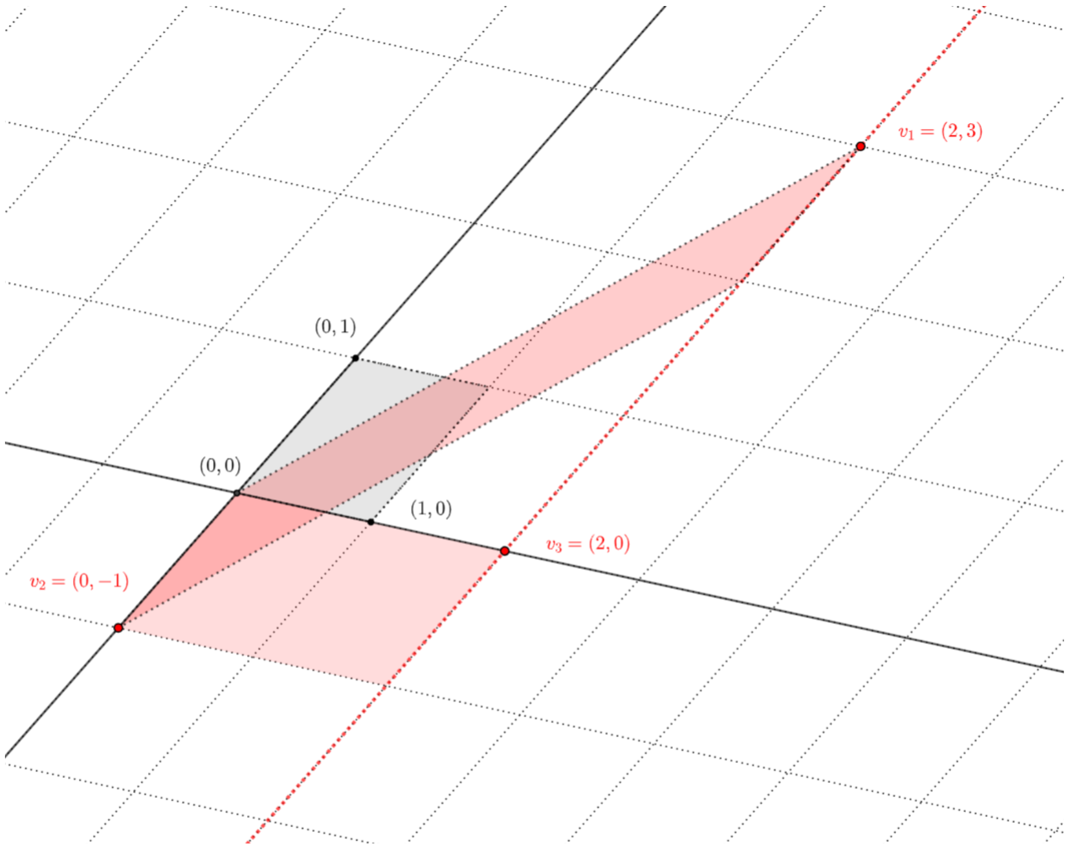



Il est construit en empilant 4 parallélogramme gris : il est donc d'aire 8. Par ailleurs, il est orienté indirectement (car le sens de rotation de $v_1$ vers $v_2$ est le sens des aiguilles d'une montre), si bien que l'aire orientée de $v_1, v_2$ est égale à $-8$.

b. Appliquons une nouvelle fois la formule faisant le lien entre aire orientée et déterminant :

$$\begin{cases} v_1 = 2e_1 + 3e_2 \\ v_2 = -e_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \sigma(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \sigma(e_1, e_2) = -2 = -4.$$

Plaçons maintenant $v_1$ et $v_2$ dans le plan et construisons le parallélogramme correspondant :




On a aussi dessiné le parallélogramme obtenu en "glissant" $v_1$ par un multiple scalaire de $v_2$ jusqu'à $v_3 = v_1 + 3v_2$. On sait alors qu'un tel "glissement" ne modifie pas l'aire orientée. Autrement dit :

$$\sigma(v_1, v_2) = \sigma(v_1 + 3v_2, v_2) = \sigma(v_3, v_2).$$

Comme le parallélogramme construit sur $v_3, v_2$ est obtenu en empilant 2 parallélogramme gris, on voit qu'il est d'aire 4. Par ailleurs, il est orienté indirectement (car le sens de rotation de $v_3$ vers $v_2$ est le sens des aiguilles d'une montre), si bien que l'aire orientée de $v_3, v_2$, et donc aussi celle de $v_1, v_2$, est égale à $-4$.

c. La formule faisant le lien entre aire orientée et déterminant donne ici :

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_2 \\ v_2 = 2e_1 + 4e_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \sigma(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \sigma(e_1, e_2) = 0.$$

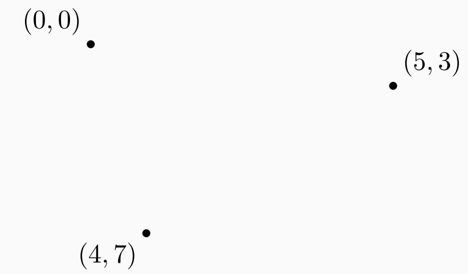
Géométriquement, $(0,0)$, $v_1$ et $v_2$ sont alignés (car $v_1$ et $v_2 = 2v_1$ sont proportionnels), si bien que le parallélogramme construit sur $v_1, v_2$ est aplati : il est d'aire nulle.

**Exercice 2.** On donne les deux bases suivantes de $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{B} = (5,3), (4,7) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (14,13), (1,-4).$$

a. Déterminer la matrice de changement de base $P$ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

b. Reproduire (approximativement) le dessin ci-dessous sur votre feuille puis placer $\mathcal{B}'$ dessus.




c. Calculer $\det(P)$ et interpréter géométriquement le résultat.

Solution:

a. Notons :

$$\underbrace{v_1=(5,3),\ v_2=(4,7)}_{\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad \underbrace{v_1'=(14,13),\ v_2'=(1,-4)}_{\mathcal{B}'}.$$

Pour faire le lien entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, passons de manière intermédiaire par la base canonique :

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = \underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}$$

On peut alors écrire, en notation matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 13 & -4 \end{pmatrix}$$

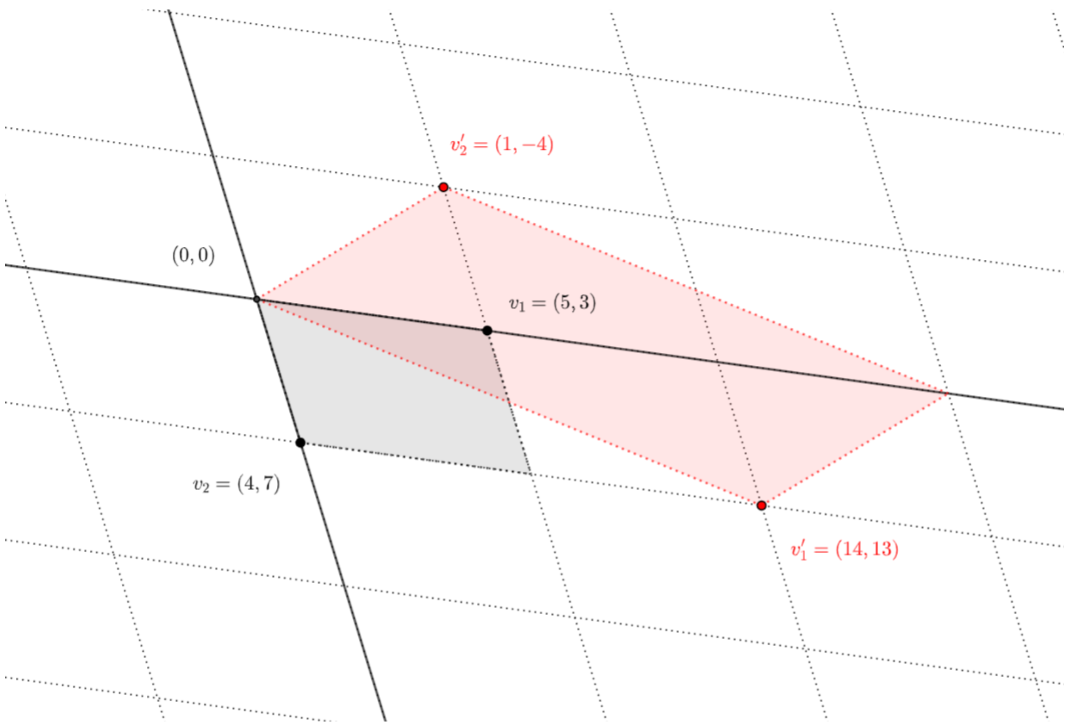
d'où l'on déduit :

$$\begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 13 & -4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{23} \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 13 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

b. La matrice $P$ trouvée au a. nous montre qu'on a les décompositions suivantes (que l'on peut bien sûr vérifier directement) :

$$\begin{cases} v_1' = 2v_1 + v_2 \\ v_2' = v_1 - v_2 \end{cases}$$

Pour placer $\mathcal{B}'$ sur le dessin, on peut alors imaginer la "grille" associée à $\mathcal{B}$. Sur celle-ci, on trouve $v_1'$ en faisant deux pas de type $v_1$ et un de type $v_2$, puis on trouve $v_2'$ en faisant un pas de type $v_1$ et en "reculant" d'un pas de type $v_2$.



c. On trouve :

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

On sait alors que :

$$\begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} P \quad \Rightarrow \quad \sigma(v_1', v_2') = \det(P)\sigma(v_1, v_2) = -3\sigma(v_1, v_2).$$

Interprétation géométrique : le parallélogramme construit sur $v_1', v_2'$ (en rouge ci-dessus) est 3 fois plus étendu que celui construit sur $v_1, v_2$ (en gris), et orienté dans l'autre sens (le gris est orienté indirectement, le rouge directement).

**Exercice 3.** Dans $\mathbb{R}^2$, on donne les éléments suivants :

$$v_1 = (4, -1),\ v_2 = (0, 5),\ v_3 = (1, 2).$$

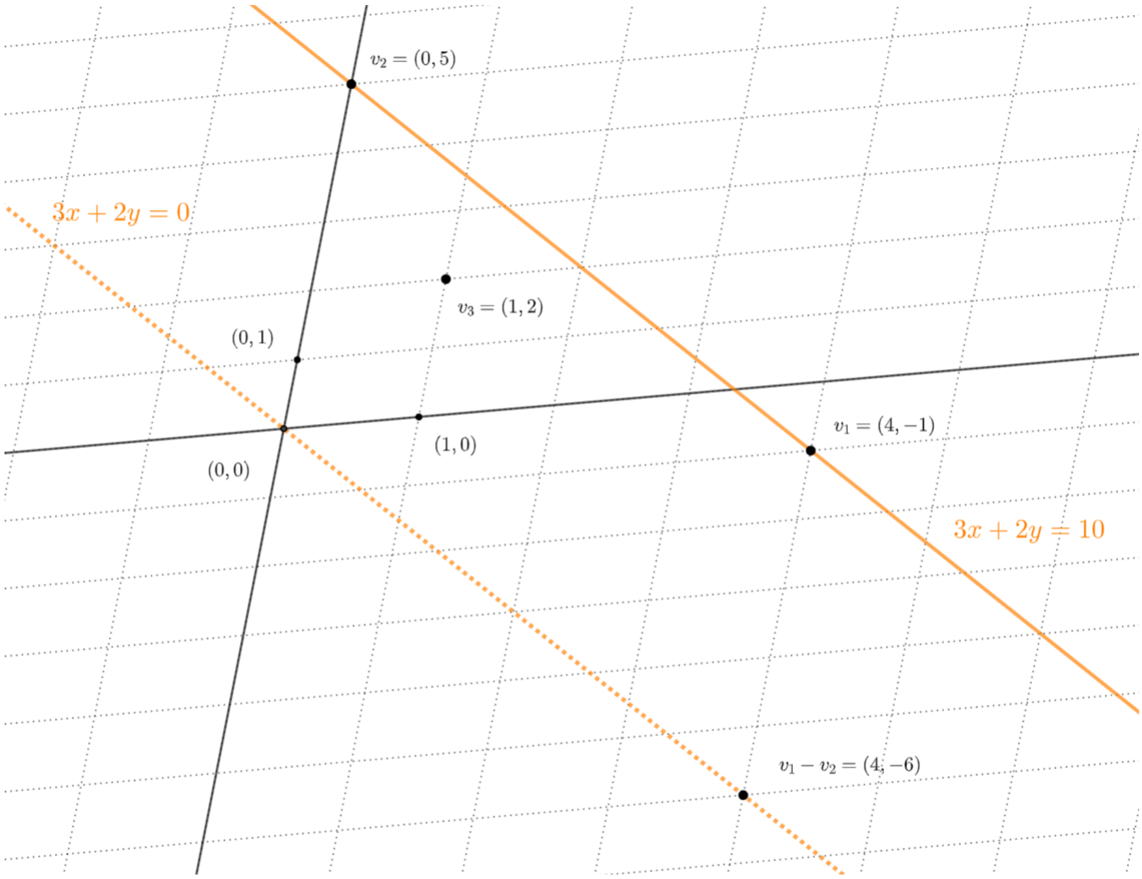
a. Déterminer une équation de la droite de $\mathbb{R}^2$ contenant $v_1$ et $v_2$ et la représenter sur un dessin.

b. Mêmes questions pour la droite contenant $v_3$ et dirigée par $v_2$.

c. Identifier l'intersection des droites introduites en a. et b.

Solution:

a. Appelons $V$ la droite de $\mathbb{R}^2$ contenant $v_1$ et $v_2$ (en orange sur la figure ci-dessous).




La droite vectorielle associée à $V$ (en pointillés ci-dessus) est dirigée par :

$$v_1 - v_2 = (4, -1) - (0, 5) = (4, -6) = 2(2, -3).$$

Elle admet pour équation :

$$3x + 2y = 0.$$

Rappelons deux méthodes pour trouver cette équation. Tout d'abord, on peut exprimer la nullité d'un déterminant :

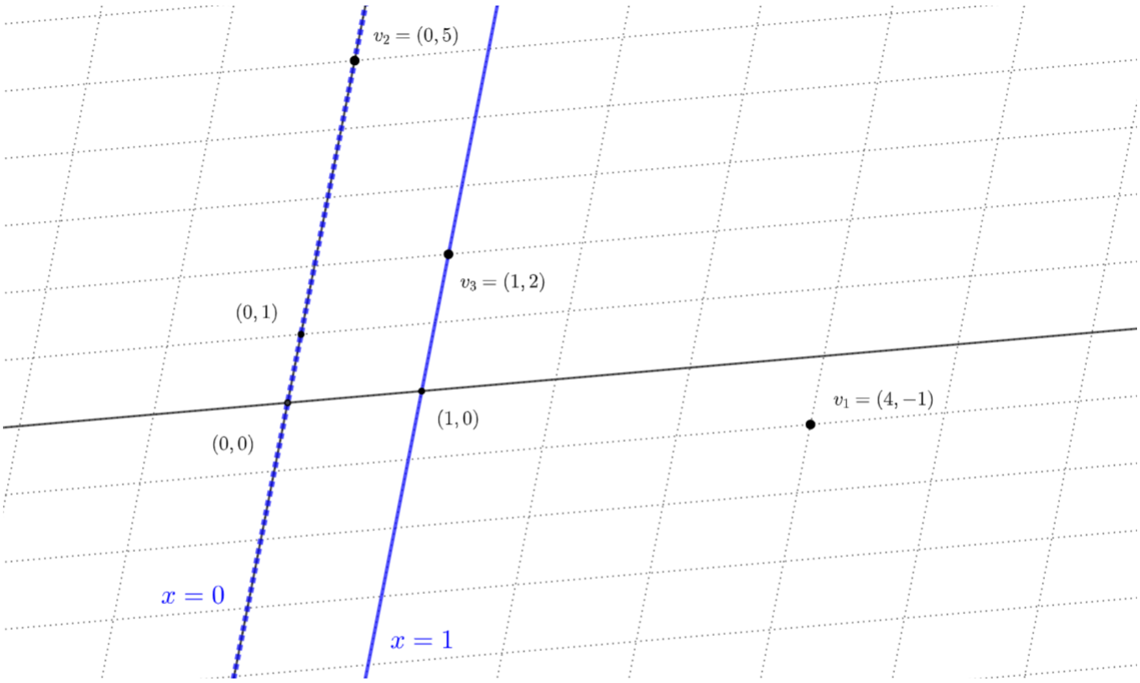
$$\underbrace{\begin{vmatrix} x & 2 \\ y & -3 \end{vmatrix} = -3x - 2y = 0}_{(x,y) \text{ et } (2,-3) \text{ proportionnels}} \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y = 0.$$

Une autre manière consiste à créer une équation linéaire homogène dont $(2,-3)$ est solution. Pour obtenir une équation de $V$ il n'y a plus qu'à évaluer $3x+2y$ en $v_1$ ou en $v_2$. On trouve :

$$V : 3x + 2y = 10.$$

b. Appelons $W$ la droite contenant $v_3$ et dirigée par $v_2$ (en bleu sur la figure ci-dessous). La droite vectorielle associée à $W$ est $\mathrm{Vect}(v_2)$, qui a pour équation $x = 0$ (en pointillés sur la figure ci-dessous). On en déduit alors :

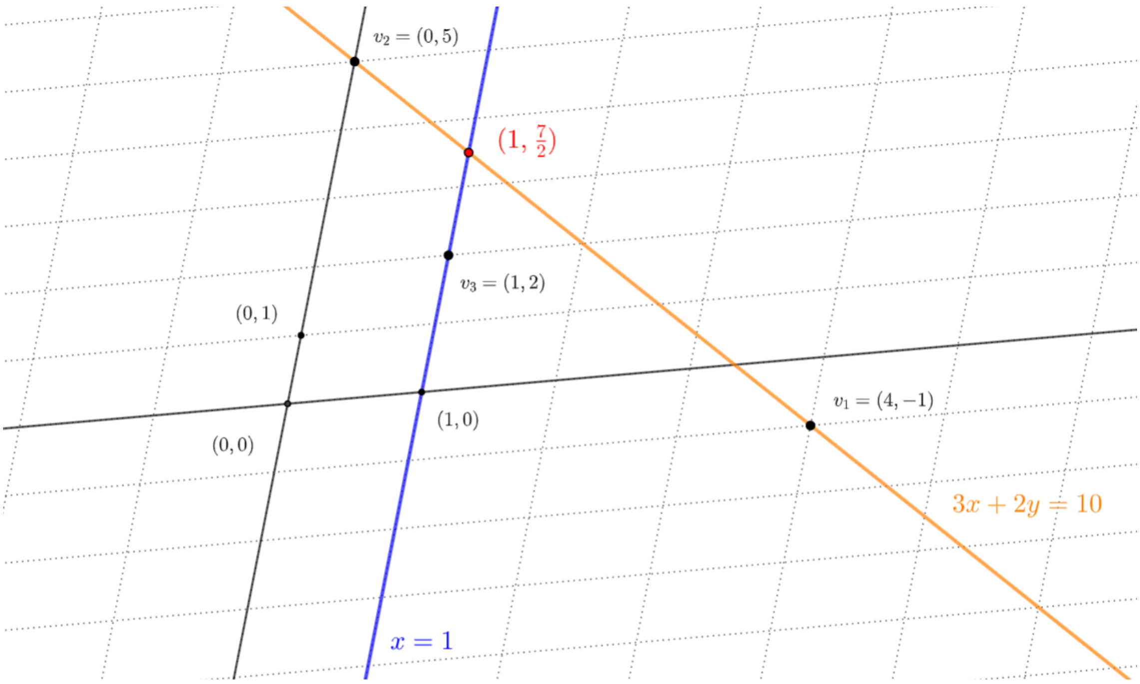
$$W : x = 1.$$




c. L'intersection de $V$ et $W$ est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

On voit donc qu'il n'y a qu'un seul élément dans cette intersection, à savoir $(1, \frac{7}{2})$. Géométriquement, cela signifie que les deux droites étudiées ci-dessus s'intersectent en un unique point du plan :



**Exercice 4.** Combien de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ distincts sont décrits ci-dessous ?

$$(5,-3)+\mathrm{Vect}((2,-1))\ ,\qquad 2x+4y+2=0,\qquad (25,-13)+\mathrm{Vect}((-\sqrt{3},\tfrac{\sqrt{3}}{2}))$$

Solution: Les trois sous-ensembles donnés sont des droites affines de $\mathbb{R}^2$ (celle du milieu est déterminée par une équation, et les deux autres par une description paramétrique). Nous allons voir qu'il s'agit en fait de la même droite, décrite de trois façons différentes. Montrons par exemple que les deux premières droites décrites sont les mêmes. Elles ont en tout cas la même droite vectorielle associée, à savoir celle d'équation $2x+4y=0$, puisque :

$$2\cdot 2+4\cdot(-1)=0.$$

Géométriquement, cela signifie que ces deux droites sont parallèles. De plus, elles ont un élément en commun, à savoir $(5,-3)$, puisque :

$$2\cdot 5+4\cdot(-3)+2=0.$$

On peut donc bien conclure qu'elles sont égales. En raisonnant de manière analogue, on montre que la deuxième et la troisième droites sont en fait les mêmes, ce qui achève de montrer le résultat voulu.

**Exercice 5.** Dans chacun des cas suivants, donner une équation du plan $V$ de $\mathbb{R}^3$ décrit par les conditions données :

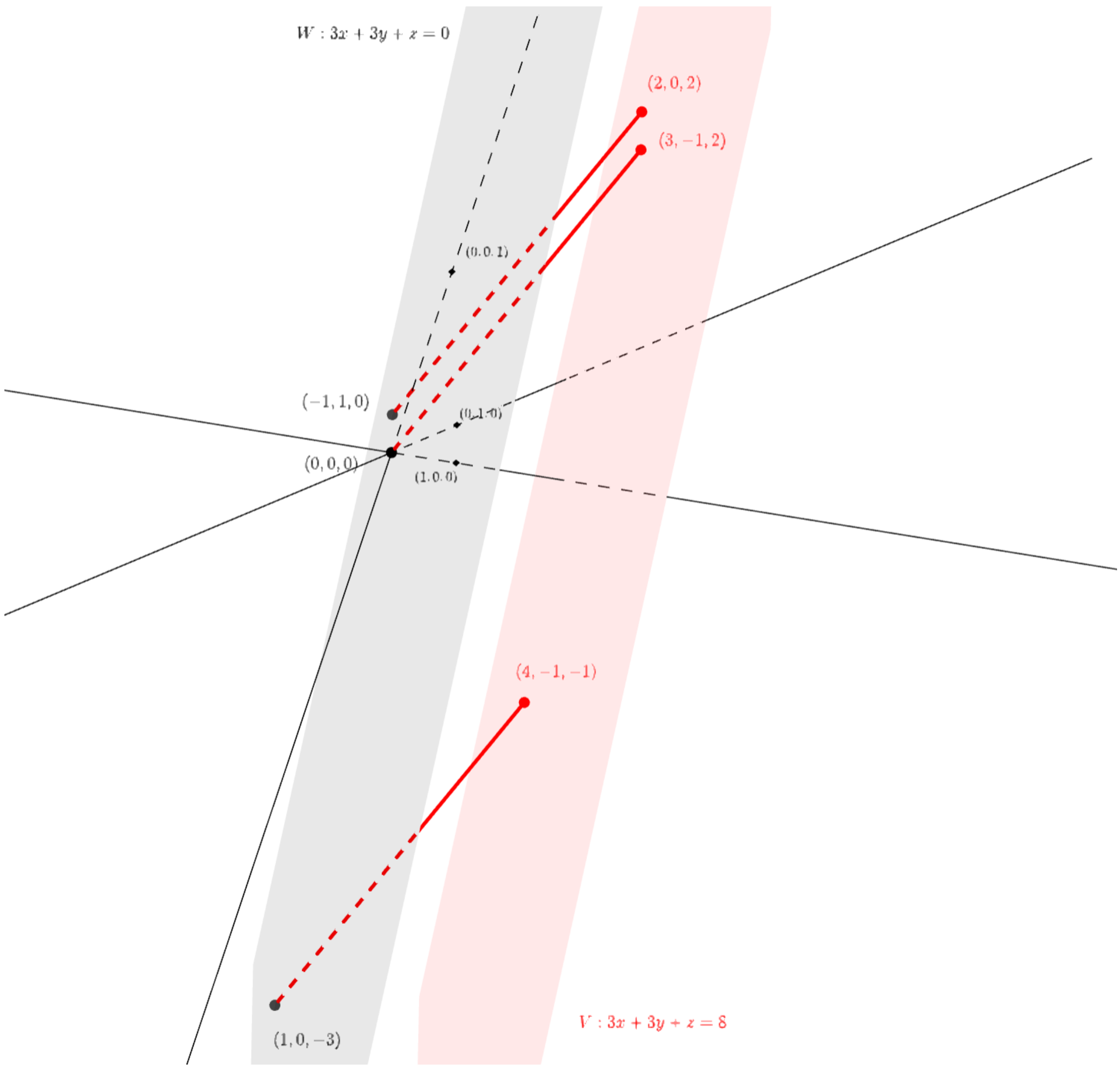
a. $(3,-1,2),(4,-1,-1)$ et $(2,0,2)$ appartiennent à $V$.

b. $V$ contient $(3,-2,-7)$ et est parallèle au plan d'équation $2x-3z+5=0$.

c. $V$ contient $(2,-1,3)$ ainsi que la droite d'équations $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

Solution:

a. Figure d'étude :



Le plan vectoriel $W$ associé à $V$ est contient :

$$(4,-1,-1)-(3,-1,2)=((1,0,-3)) \quad \text{et} \quad (2,0,2)-(3,-1,2)=(-1,1,0).$$

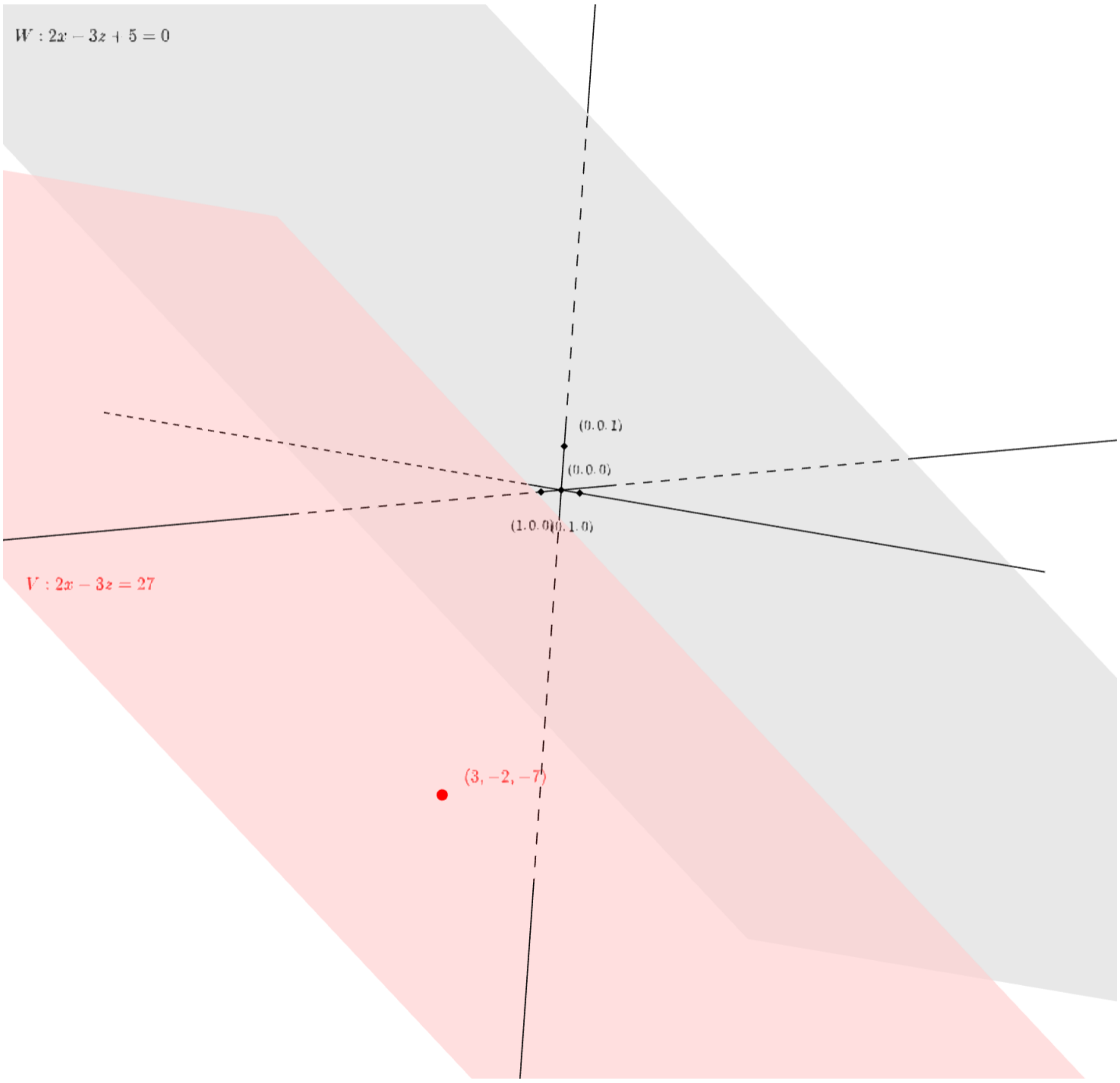
Il admet donc pour équation :

$$W : \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 0 & 1 \\ z & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} z = 3x+3y+z=0.$$

Pour obtenir une équation de $V$ il n'y a plus qu'à évaluer $3x+3y+z$ en $(3,-1,2)$, $(4,-1,-1)$ ou $(2,0,2)$ (on obtient la même valeur). On trouve :

$$V : 3x+3y+z=8.$$

b. Figure d'étude :




Pour obtenir une équation de $V$, il faut juste changer la constante dans celle de $W : 2x-3z+5=0$, pour que le triplet $(3,-2,-7)$ soit solution. On trouve :

$$V : 2x-3z=27.$$

c. La droite d'équations $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$ contient les triplets suivants (solutions particulières des équations) :

$$(1,2,-3),\ (4,4,-5),\ (7,6,-7)\ \ldots$$

Le plan $V$ peut donc être caractérisé par exemple comme l'unique plan contenant les triplets suivants :

$$(2,-1,3),\ (1,2,-3),\ (4,4,-5).$$

On peut alors raisonner comme au a. pour en trouver une équation. Le plan vectoriel $W$ associé à $V$ contient :

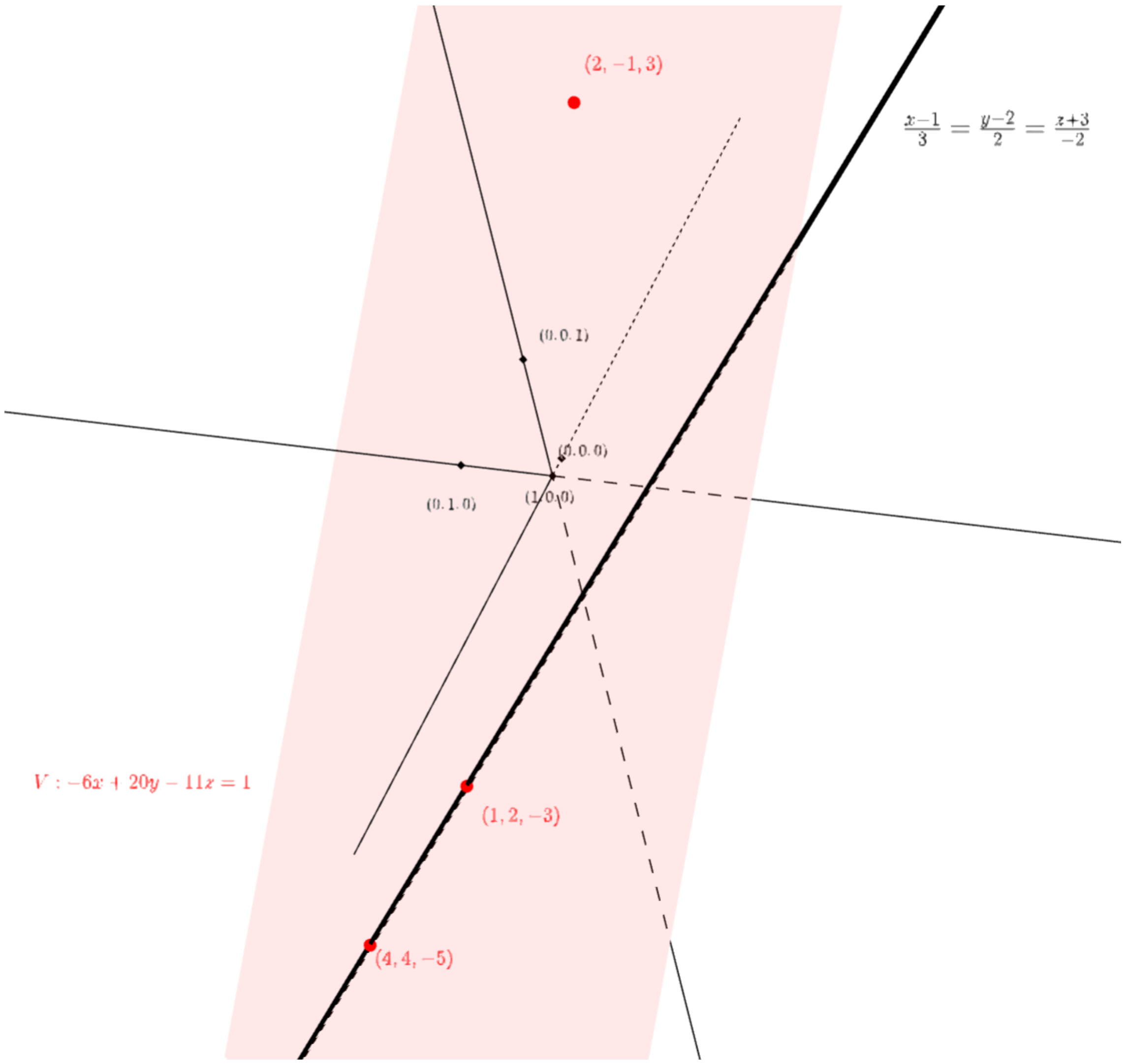
$$(2,-1,3)-(1,2,-3)=(1,-3,6) \quad \text{et} \quad (4,4,-5)-(1,2,-3)=(3,2,-2).$$

Il admet donc pour équation :

$$W : \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & -3 & 2 \\ z & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} z = -6x + 20y + 11z = 0.$$

Pour obtenir une équation de $V$ il n'y a plus qu'à évaluer $-6x + 20y + 11z$ en $(2, -1, 3)$, $(1, 2, -3)$ ou $(4, 4, -5)$ (on obtient la même valeur). On trouve :

$$V : -6x + 20y + 11z = 1.$$




**Exercice 6.** Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les trois plans suivants :

$$U : x + y + z = 3\,, \quad V : x + 2y + 3z = 6\,, \quad W : 2x + y = 7.$$

a. Donner une description paramétrique de $U \cap V$.

b. Représenter sur un dessin les plans $U$ et $V$ ainsi que leur intersection.

c. Identifier l'intersection $U \cap V \cap W$ puis placer $W$ sur votre dessin.

Solution:

a. Pour identifier l'intersection $U \cap V$ on résout le système linéaire :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (3 - 2z) + z = 3 \\ y = 3 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 3 - 2z. \end{cases}$$

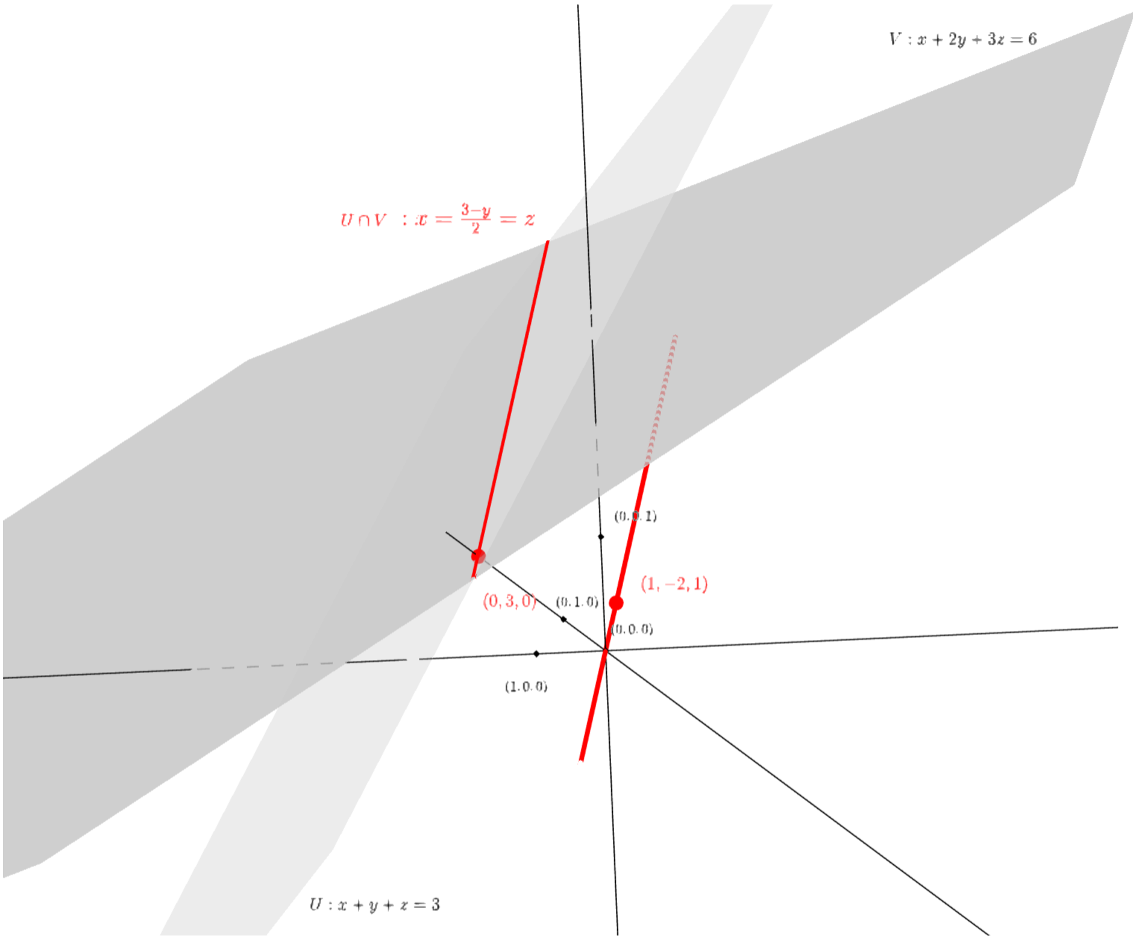
Par conséquent :

$$(x, y, z) \in U \cap V \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (z, 3 - 2z, z) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (0, 3, 0) + z(1, -2, 1).$$

Ceci correspond bien à une description paramétrique de $U \cap V$ (où $z$ est le paramètre) :

$$U \cap V = \{(0, 3, 0) + z(1, -2, 1) \quad | \quad z \in \mathbb{R}\}.$$

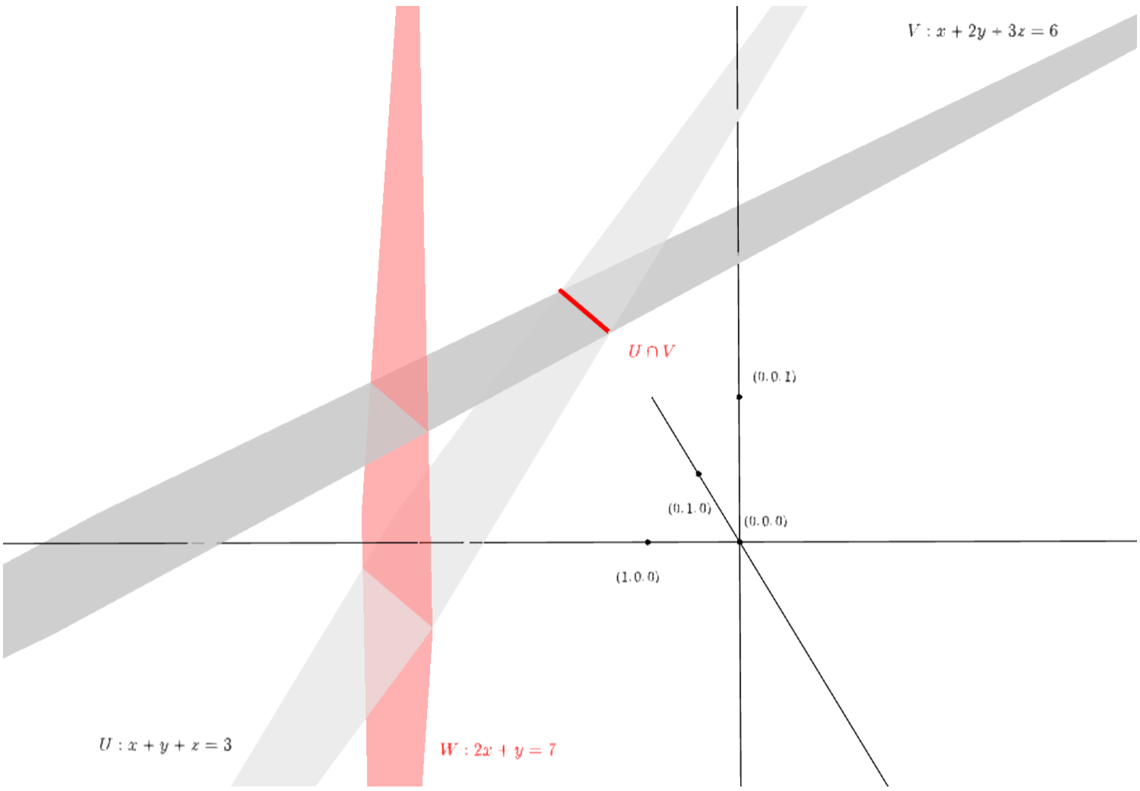
b. D'après le a., on sait que $U \cap V$ est une droite de $\mathbb{R}^3$ : c'est celle contenant $(0,3,0)$ et dirigée par $(1,-2,1)$. On obtient le dessin suivant (où l'on représente aussi la droite vectorielle associée à $U \cap V$) :




c. Pour identifier l'intersection $U \cap V \cap W$ on peut résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+3z=6 \\ 2x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=3-2z \\ 2z+(3-2z)=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=3-2z \\ 3=7 \end{cases}$$

(à la première étape, on a directement intégré le calcul de $U \cap V$ effectué au a.). Le dernier système n'ayant visiblement aucune solution (aucun choix de $x, y$ et $z$ ne peut permettre de satisfaire la dernière équation), on peut en conclure que l'intersection recherchée est vide. Géométriquement, cela peut s'interpréter en disant que la droite $U \cap V$ est parallèle au plan $W$.



Les trois plans $U, V$ et $W$ sont un peu comme les trois faces d'un Toblerone !

**Exercice 7.** Dans $\mathbb{R}^3$, on donne le système suivant, avec second membre indéterminé :

$$\begin{cases} x - 4y + 7z = \alpha \\ 3x + y + 8z = \beta \\ 2x - 8y + 14z = \gamma. \end{cases}$$

En discutant selon la valeur des paramètres réels $\alpha, \beta$ et $\gamma$, résoudre ce système et interpréter géométriquement la résolution.

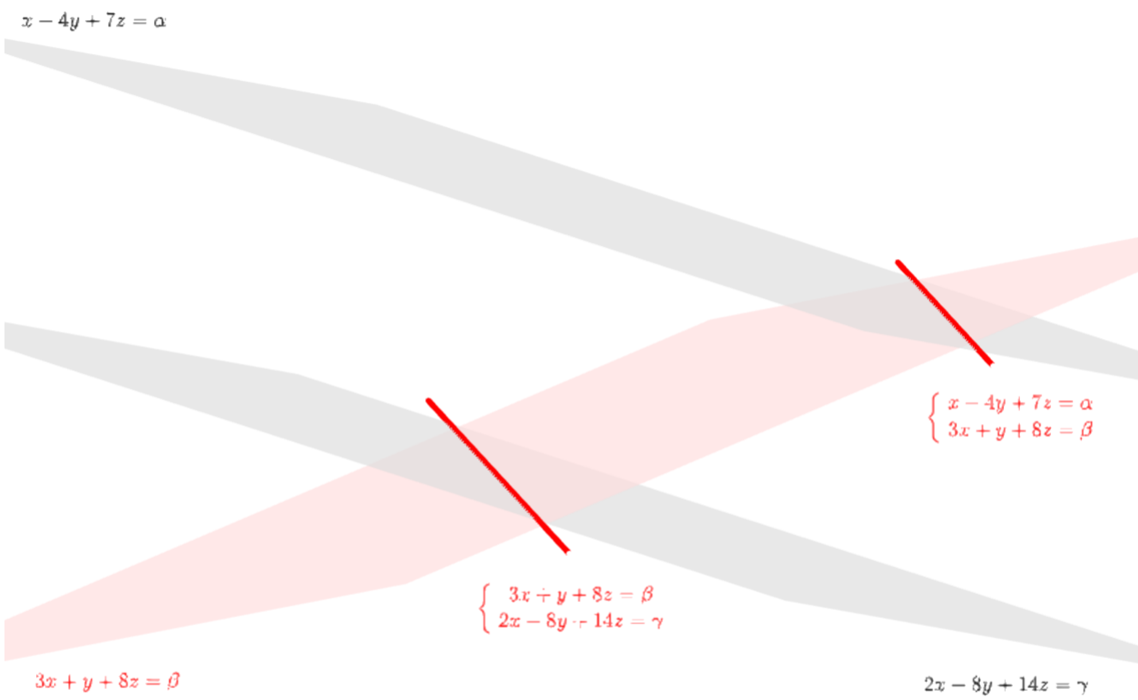
Solution: Commençons par remarquer que :

$$2x - 8y + 14z = 2(x - 4y + 7z).$$

On va alors distinguer deux cas. Tout d'abord, supposons que :

$$\gamma \neq 2\alpha.$$

Dans ce cas, la première et la troisième équation du système donné sont incompatibles, si bien que l'ensemble des solutions est vide. Géométriquement, ces deux équations définissent deux plans parallèles représenté en gris sur la figure ci-dessous :




Le plan en rouge, défini par la deuxième équation, intersecte chacun des deux plans gris séparément selon deux droites qui sont parallèles. Il n'y a donc pas d'éléments dans l'intersection "globale" de ces trois plans : l'ensemble des solutions est vide. Passons maintenant au cas où :

$$\gamma = 2\alpha.$$

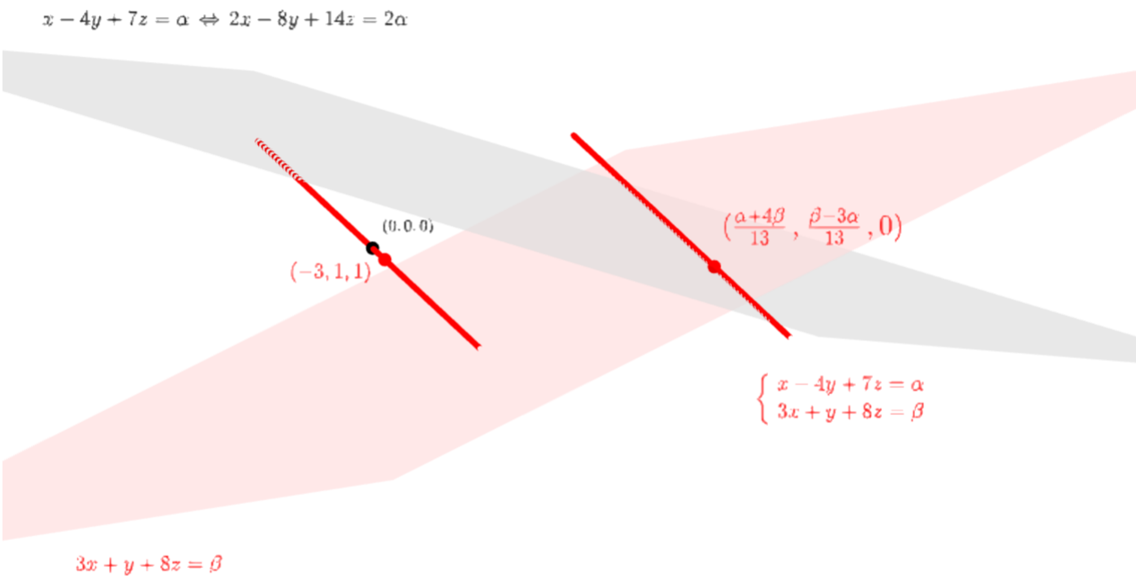
Dans ce cas, on obtient :

$$\begin{cases} x - 4y + 7z = \alpha \\ 3x + y + 8z = \beta \\ 2x - 8y + 14z = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 7z = \alpha \\ 3x + y + 8z = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + 7z = \alpha \\ 13y - 13z = \beta - 3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z + \dfrac{\alpha + 4\beta}{13} \\ y = z + \dfrac{\beta - 3\alpha}{13} \end{cases}$$

Autrement dit, un triplet $(x, y, z)$ est solution du sytème proposé si et seulement s'il est de la forme :

$$(x, y, z) = (-3z + \frac{\alpha + 4\beta}{13}, z + \frac{\beta - 3\alpha}{13}, z) = (\frac{\alpha + 4\beta}{13}, \frac{\beta - 3\alpha}{13}, 0) + z(-3, 1, 1).$$

L'ensemble des solutions du système proposé est donc dans ce cas la droite contenant le triplet $(\frac{\alpha+4\beta}{13}, \frac{\beta-3\alpha}{13}, 0)$ et dirigé par $(-3, 1, 1)$. Géométriquement, on a le dessin suivant :




**Exercice 8.** Si c'est possible, donner les équations d'une droite $V$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

a. $(-3,-2,1)$ appartient à $V$.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $V$ est parallèle au plan d'équation $3x-5y+4z=12$.

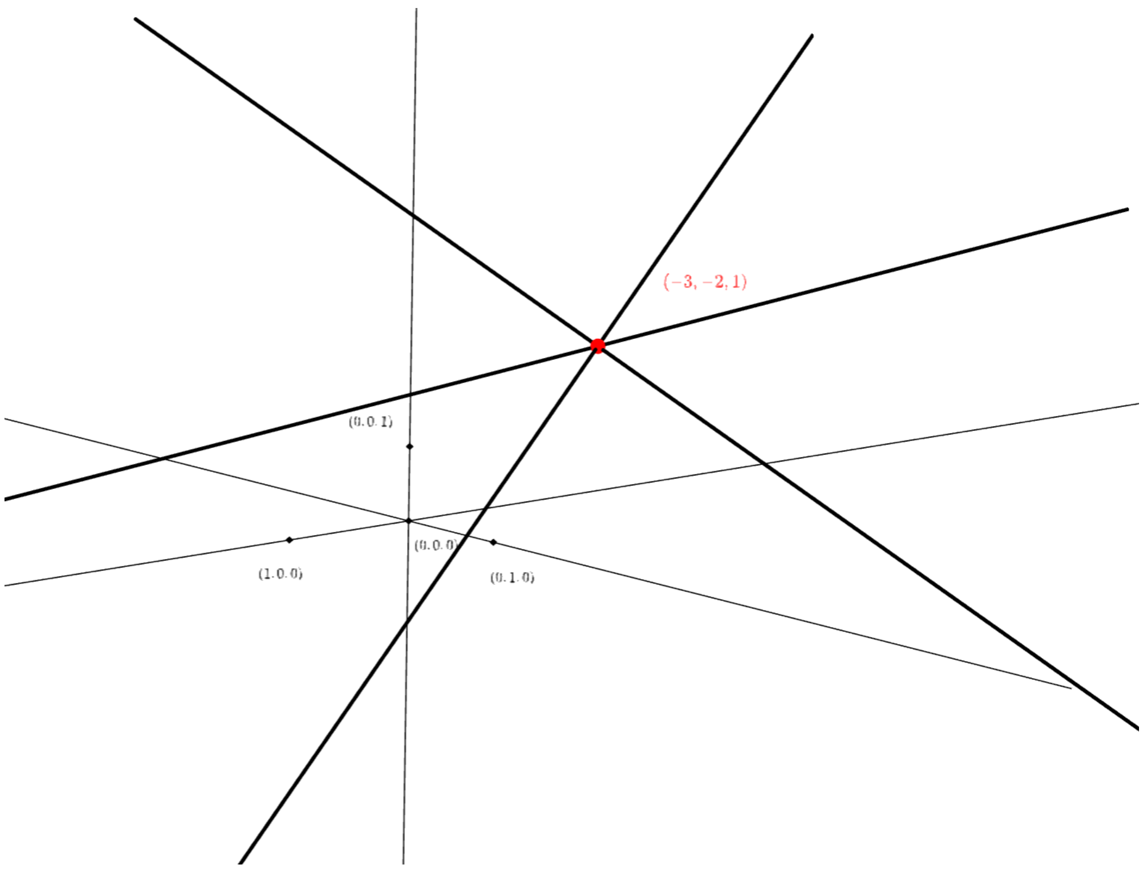
c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément $V$ possède un élément en commun avec la droite d'équations :

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}.$$

Solution:

a. Il y a beaucoup de possibilités. Les droites $V$ qui fonctionnent sont toutes celles du type :

$$V=(-3,-2,1)+\mathrm{Vect}(v_1) \quad \text{où} \quad v_1\in\mathbb{R}^3,\, v_1\neq(0,0,0).$$



Voici quelques exemples :

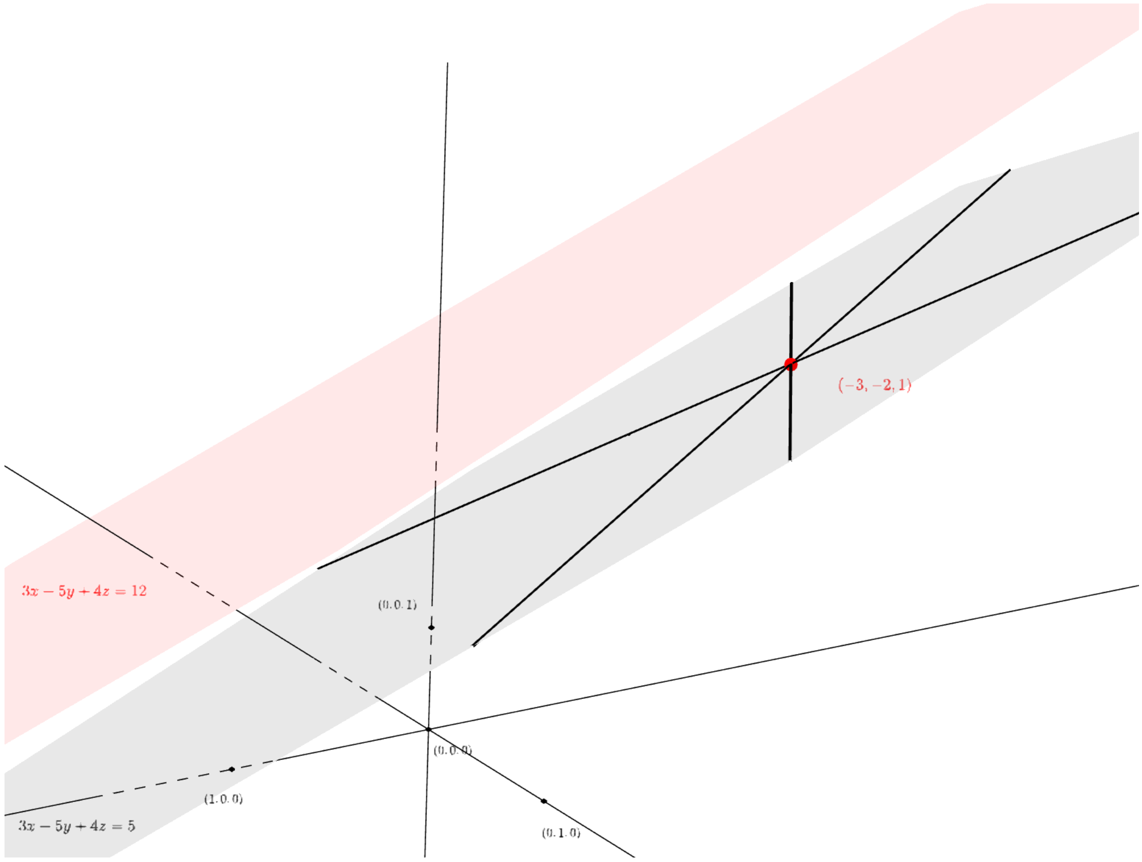
$$\underbrace{x+3=y+2=z-1}_{v_1=(1,1,1)}, \qquad \underbrace{\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3},\ z=1}_{v_1=(2,3,0)}, \qquad \underbrace{x=-3, y=-2}_{v_1=(0,0,1)}, \ldots$$

b. Avec les notations du a., il faut maintenant que $v_1$ soit directeur du plan d'équation $3x-5y+4z=12$ c'est-à-dire que :

$$V=(-3,-2,1)+\mathrm{Vect}(v_1) \text{ où } v_1=(\alpha,\beta,\gamma) \text{ tel que } 3\alpha-5\beta+4\gamma=0 \text{ et } v_1\neq(0,0,0).$$

Il y a encore beaucoup de possibilités. Par exemple :

$$\underbrace{\frac{x+3}{5}=\frac{y+2}{3},\ z=1}_{v_1=(5,3,0)}, \qquad \underbrace{x=-3,\ \frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}}_{v_1=(0,4,5)}, \qquad \underbrace{\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{2}=z-1}_{v_1=(2,2,1)}, \ldots$$




Géométriquement, on voit que toutes les droites trouvées ici sont contenues dans le plan :

$$W : 3x-5y+4z=5$$

(obtenu en "décalant" $3x-5y+4z=12$ pour "le faire passer" par $(-3,-2,1)$).

c. La condition supplémentaire impose à $V$ de contenir le point d'intersection du plan $W$ (introduit au b.) et de la droite d'équations :

$$\frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{3}.$$

Pour identifier ce point, résolvons le système :

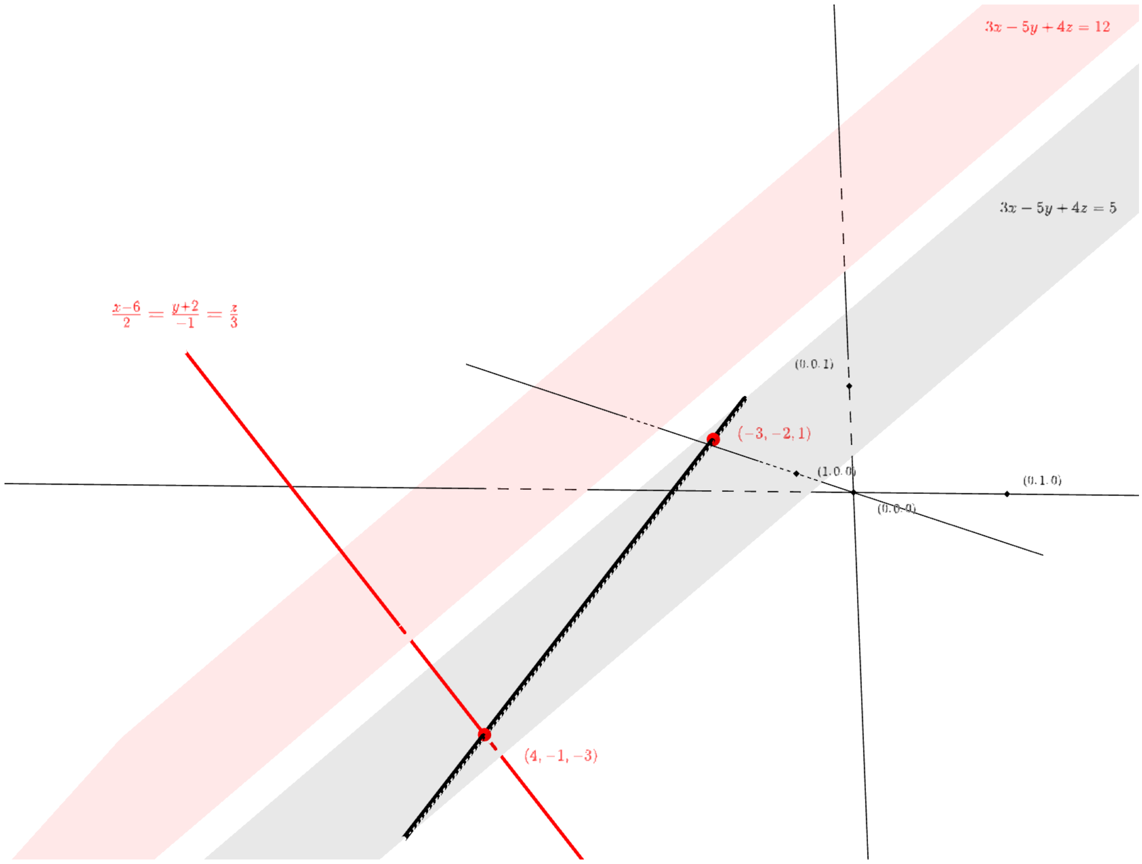
$$\begin{cases} 3x-5y+4z=5 \\ \dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+2}{-1} \\ \dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-5y+4z=5 \\ x+2y=2 \\ 3y+z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2-2y)-5y+4(-6-3y)=5 \\ x=2-2y \\ z=-6-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=4 \\ z=-3. \end{cases}$$

Il y a donc une unique droite solution du problème posé ici, à savoir celle contenant $(-3,-2,1)$ et $(4,-1,-3)$. Avec les notations du a. on prend donc :

$$v_1=(4,-1,-3)-(-3,-2,1)=(7,1,-4)$$

si bien que $V$ admet pour équations :

$$\frac{x+3}{7}=y+2=\frac{z-1}{-4}.$$



$3x - 5y + 4z = 12$
$3x - 5y + 4z = 5$
$\frac{x-6}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$
$(0, 0, 1)$
$(-3, -2, 1)$
$(1, 0, 0)$
$(0, 1, 0)$
$(0, 0, 0)$
$(4, -1, -3)$