Série 5

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les éléments suivants :

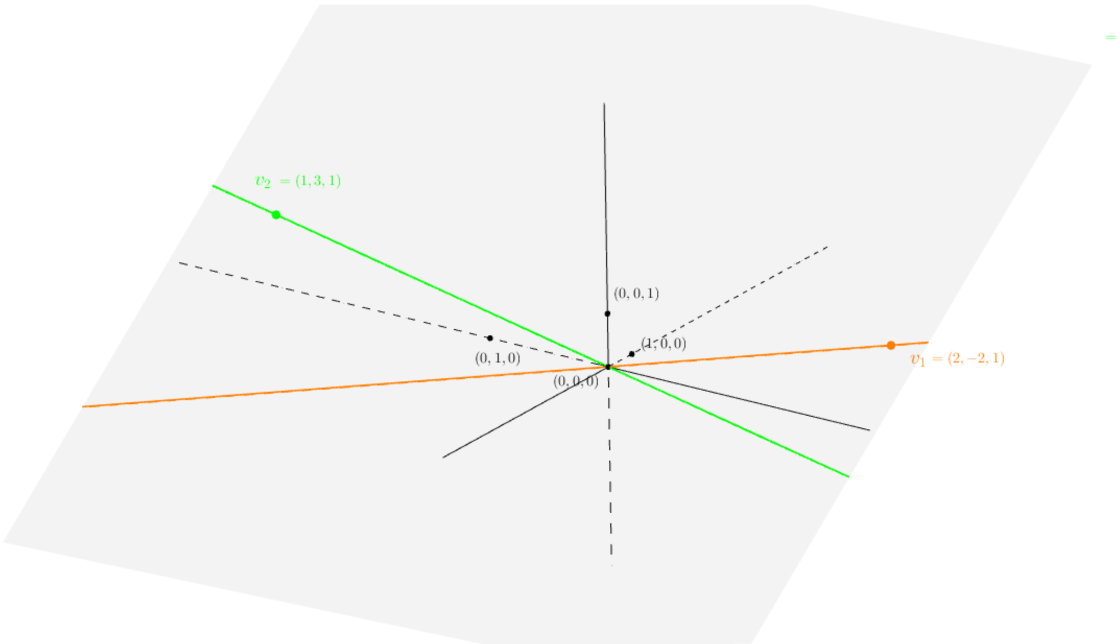
$$v_1 = (2, -2, 1),\ v_2 = (1, 3, 1),\ v_3 = (-1, 1, -\tfrac{1}{2}),\ v_4 = (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{2}, -\tfrac{1}{2}).$$

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la dimension et une base de V :

a. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ b. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$ c. $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4)$.

Solution:

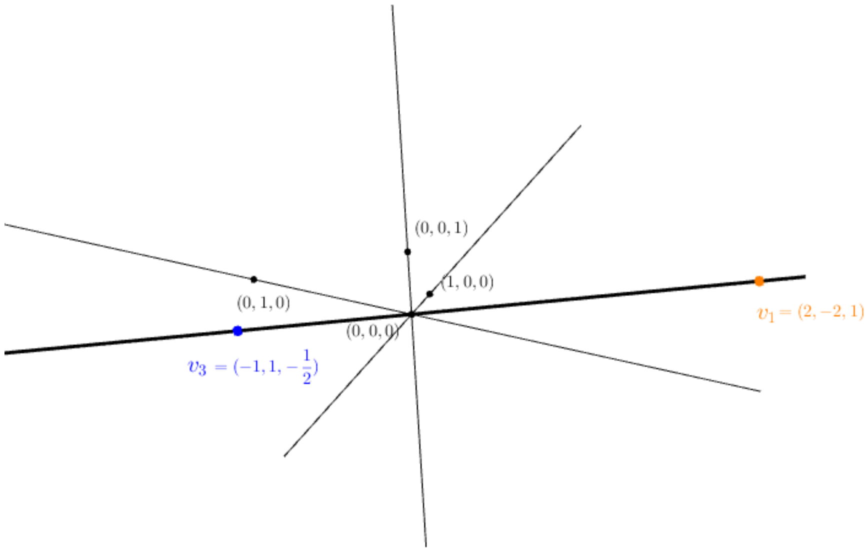
a. Observons que v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels. Par conséquent, $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est un plan vectoriel, il est de dimension 2. La famille v_1, v_2 en est une base (de même que toute famille formée de deux éléments de V qui ne sont pas proportionnels). Visuellement :



b. Les éléments v_1 et v_3 sont non nuls et ils sont proportionnels car $v_1 = -2v_3$. Par conséquent :

$$V = \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1) = \mathrm{Vect}(v_3)$$

est une droite vectorielle (dimension 1). La famille v_1 (à un élément) en est une base (tout comme la famille v_3 par exemple, ou encore toute famille formée d'un multiple scalaire non nul de v_1). Visuellement :



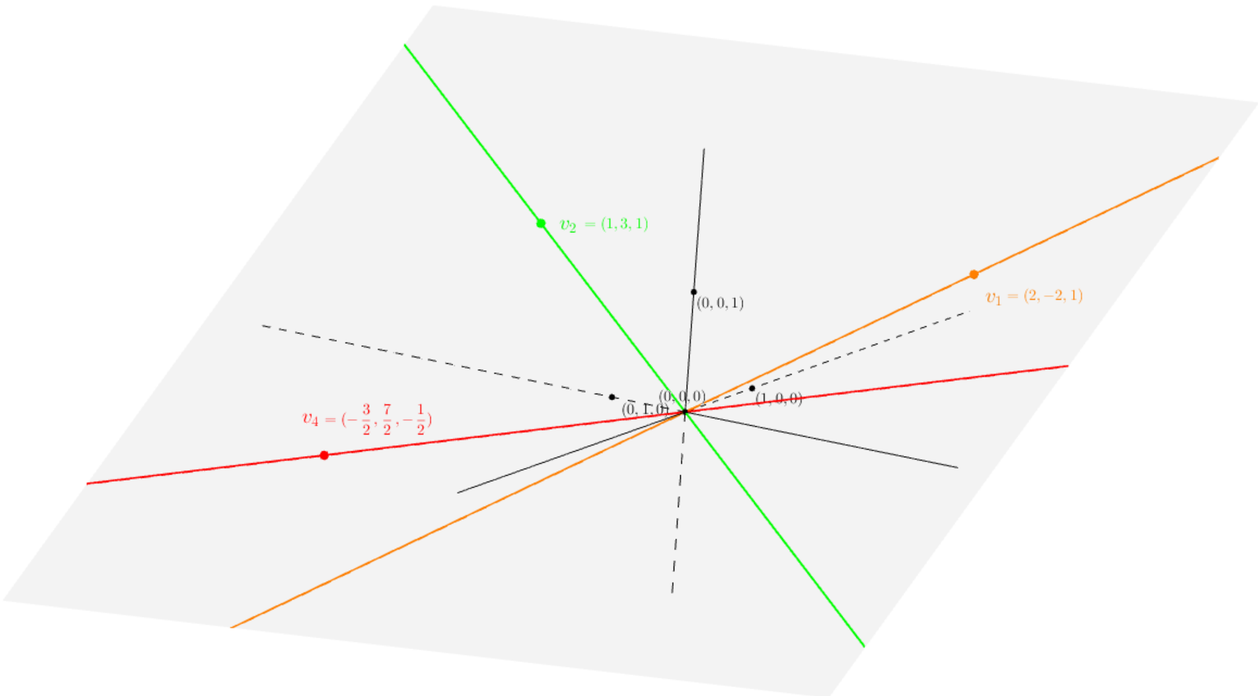
c. Nous avons déjà vu au a. que v_1 et v_2 engendrent un plan vectoriel. Par conséquent il y a deux possibilités : soit V est égal à ce plan vectoriel (ce sera le cas si et seulement si v_4 est combinaison linéaire de v_1 et v_2), soit V est égal à $\mathbb{R}^3$. Pour décider dans quel cas on est, on peut par exemple calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 3 & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Comme ce déterminant est nul, on sait que V est un plan vectoriel (dimension 2). La famille v_1, v_2 est une base de V (tout comme la famille v_1, v_4, ou v_2, v_4, ou encore toute famille formée de deux éléments de V qui ne sont pas proportionnels) :

$$V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_4) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_4) = \mathrm{Vect}(v_2, v_4) = \cdots$$

Visuellement :



Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$, où :

$$v_1 = (2, 1, -1),\ v_2 = (-1, 3, 0),\ v_3 = (1, -1, 2).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Ecrire des équations de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v_1)$. Même question pour $\mathrm{Vect}(v_2)$.

c. Déterminer une équation du plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

d. Pour tout $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ et écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$. Vérifier votre résultat avec $v = (0, 1, 0)$.

Solution:

a. Pour établir que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut par exemple calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Comme il est non nul, on sait que $\mathcal{B}$ est bien une base.

b. On trouve par exemple :

$$\mathrm{Vect}(v_1) : \tfrac{x}{2} = y = -z \quad \text{et} \quad \mathrm{Vect}(v_2) : -x = \tfrac{y}{3},\ z = 0.$$

c. Le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est décrit par l'équation :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ y & 1 & 3 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x + y + 7z = 0.$$

d. Notons P la matrice de changement de base de la base canonique $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ à $\mathcal{B}$ est alors la matrice Q inverse de P et on a :

$$\underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}} = \underbrace{Q[v]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}}}_{P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \quad \Leftrightarrow \quad P\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On trouve donc les coordonnées de v en inversant le système linéaire général de matrice P :

$$\begin{cases} 2t_1 - t_2 + t_3 = x \\ t_1 + 3t_2 - t_3 = y \\ -t_1 + 2t_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 - t_2 + t_3 = x \\ 7t_1 + 2t_3 = 3x + y \\ -t_1 + 2t_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 - t_2 + t_3 = x \\ 8t_1 = 3x + y - z \\ -t_1 + 2t_3 = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}z \\ t_2 = -\frac{1}{16}x + \frac{5}{16}y + \frac{3}{16}z \\ t_3 = \frac{3}{16}x + \frac{1}{16}y + \frac{7}{16}z \end{cases}$$

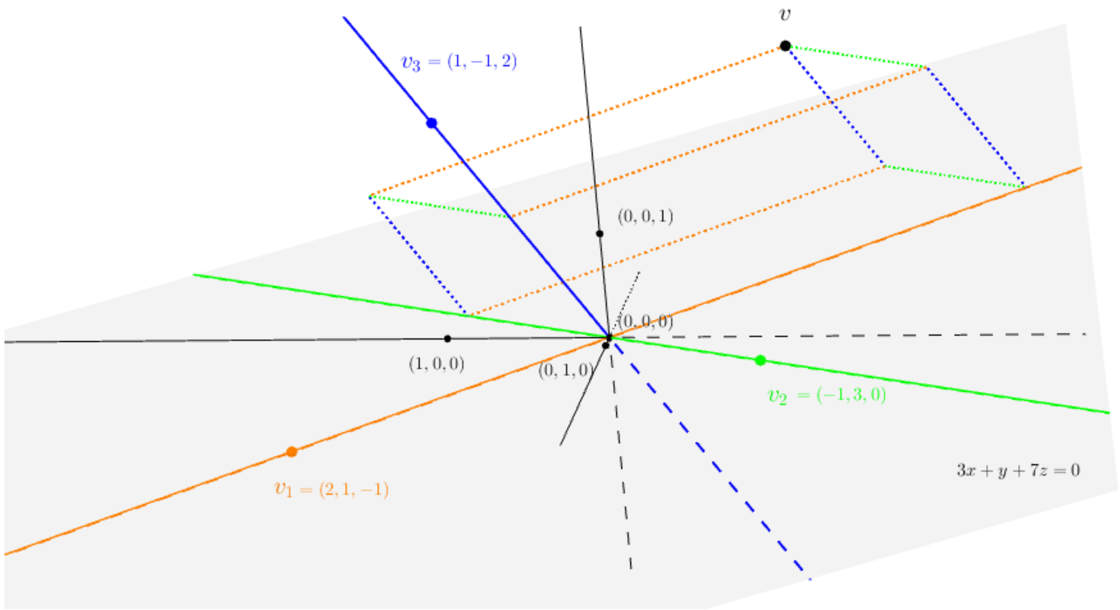
La décomposition de v sur $\mathcal{B}$ s'écrit donc :

$$(x, y, z) = (\tfrac{3}{8}x + \tfrac{1}{8}y - \tfrac{1}{8}z)(2, 1, -1) + (-\tfrac{1}{16}x + \tfrac{5}{16}y + \tfrac{3}{16}z)(-1, 3, 0) + (\tfrac{3}{16}x + \tfrac{1}{16}y + \tfrac{7}{16}z)(1, -1, 2).$$

Pour $v = (0, 1, 0)$, le membre de droite dans la décomposition ci-dessus vaut :

$$\tfrac{1}{8}(2, 1, -1) + \tfrac{5}{16}(-1, 3, 0) + \tfrac{1}{16}(1, -1, 2) = \tfrac{1}{16}(4 - 5 + 1, 2 + 15 - 1, -2 + 0 + 2) = (0, 1, 0).$$

Comme on trouve bien $(0, 1, 0)$ notre formule est confirmée sur cet exemple. Pour terminer, représentons sur la figure ci-dessous la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les deux familles suivantes :

$$\mathcal{B} = (1, 1, -1), (3, -2, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (2, -3, 1), (1, -4, 2).$$

a. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases d'un même plan vectoriel V dont on donnera une équation.

b. Déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

c. Soit $v = (x, y, z)$ un élément de V. Décomposer v sur $\mathcal{B}$ et en déduire $[v]_{\mathcal{B}}$.

d. Calculer alors $[v]_{\mathcal{B}'}$ et donner la décomposition de v correspondante. Vérifier votre résultat avec $v = (1, 1, -1)$.

Solution: Posons :

$$v_1 = (1, 1, -1),\ v_2 = (3, -2, 0),\ v_3 = (2, -3, 1),\ v_4 = (1, -4, 2).$$

a. Comme v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, il n'y a qu'un seul plan vectoriel dont ils forment une base, à savoir :

$$V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2).$$

Pour trouver une équation de V calculons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 1 & -2 \\ z & -1 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x - 3y - 5z.$$

On en déduit que V est décrit par l'équation $2x + 3y + 5z = 0$. Il est alors facile de vérifier que v_3 et v_4 appartiennent à V :

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 = 0.$$

Comme v_3 et v_4 ne sont pas proportionnels, on obtient finalement que $\mathcal{B}'$ est aussi une base de $\mathcal{B}$, ce que l'on voulait.

b. Soit P la matrice recherchée. Les colonnes de P ne sont autres que les coordonnées de v_3 et v_4 dans la base $\mathcal{B}$. Pour les trouver, on cherche à exprimer v_3 et v_4 comme combinaisons linéaires de v_1 et v_2. En procédant à tâtons (la présence du 0 en troisième position dans v_2 rend les calculs assez directs) on trouve :

$$\begin{cases} v_3 = -v_1 + v_2 \\ v_4 = -2v_1 + v_2 \end{cases} \Rightarrow \quad [v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } [v_4]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(si l'on ne parvient pas à trouver ces décompositions par tâtonnement, on peut par exemple poser a priori $v_3 = sv_1 + tv_2$ et résoudre un système pour trouver s et t, puis raisonner de même pour v_4). On en déduit que la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c. Toujours grâce à la présence du 0 dans v_2 on peut directement écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$:

$$(x, y, z) = \underbrace{-z(1, 1, -1)}_{(-z,-z,z)} + \frac{x+z}{3}(3, -2, 0) \quad \Rightarrow \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -z \\ \frac{x+z}{3} \end{pmatrix}.$$

Le coefficient $-z$ a été choisi pour assurer de trouver z en troisième position dans v. A partir de là, on doit utiliser le coefficient $\frac{x+z}{3}$ pour obtenir x en première position. Automatiquement, y se trouvera alors en deuxième position, puisqu'on a l'égalité suivante (due au fait que v appartient à V) :

$$-z - \tfrac{2}{3}(x + z) = -\tfrac{1}{3}(\underbrace{2x + 5z}_{-3y}) = y.$$

d. Pour trouver les coordonnées de v dans $\mathcal{B}'$, utilisons le résultat du c. et le fait que P^{-1} est la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On obtient :

$$[v]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -z \\ \frac{x+z}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ \frac{x+z}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x-z}{3} \\ \frac{-x+2z}{3} \end{pmatrix}.$$

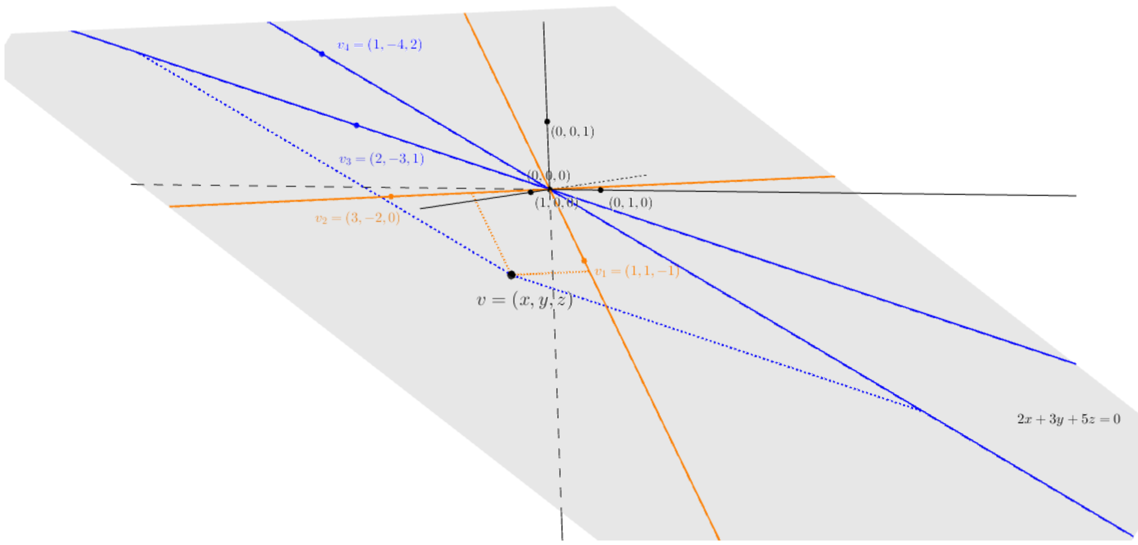
On a donc la décomposition suivante de v sur $\mathcal{B}'$:

$$(x, y, z) = \tfrac{2x-z}{3}(2, -3, 1) + \tfrac{-x+2z}{3}(1, -4, 2).$$

Pour $v = (1, 1, -1)$ (qui est bien élément de V), le membre de droite dans la décomposition ci-dessus vaut :

$$\tfrac{2\cdot 1-(-1)}{3}(2, -3, 1) + \tfrac{-1+2\cdot(-1)}{3}(1, -4, 2) = (2, -3, 1) - (1, -4, 2) = (1, 1, -1).$$

Comme on trouve bien $(1, 1, -1)$ notre formule est confirmée sur cet exemple. Pour terminer, représentons sur la figure suivante la situation étudiée dans cet exercice :



Exercice 4. On donne les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (0, 2, -7), \quad v_2 = (1, 1, 1), \quad v_3 = (2, -1, 1), \quad v = (x, y, z).$$

a. Montrer que la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. On suppose que :

$$v \in \mathrm{Vect}(v_1).$$

Quelle est la valeur de x ? Exprimer $[v]_{\mathcal{B}}$ uniquement en fonction de z.

c. On suppose maintenant que :

$$v \in \mathrm{Vect}(v_2, v_3).$$

Exprimer alors $[v]_{\mathcal{B}}$ uniquement en fonction de x et y.

Solution:

a. Notons P la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour établir que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on peut par exemple calculer le déterminant de P :

$$\det P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} = -23.$$

Comme il est non nul, on peut affirmer que $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

b. L'hypothèse signifie que v est proportionnel à v_1. Autrement dit, qu'il existe un réel α tel que :

$$v = \alpha v_1 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = \alpha(0, 2, -7) = (0, 2\alpha, -7\alpha).$$

Le premier coefficient dans ce triplet nous donne que $x = 0$. En regardant le troisième coefficient, on voit aussi que $\alpha = -\frac{z}{7}$. La décomposition de v sur la base $\mathcal{B}$ s'écrit donc :

$$v = -\tfrac{z}{7}v_1 + 0v_2 + 0v_3 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = -\tfrac{z}{7}(0, 2, -7) + 0(1, 1, 1) + 0(2, -1, 1).$$

On en déduit :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\frac{z}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c. L'hypothèse signifie cette fois-ci que v est combinaison linéaire de v_2 et v_3. Autrement dit, qu'il existe deux réels β et γ tels que :

$$v = \beta v_2 + \gamma v_3 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = \beta(1, 1, 1) + \gamma(2, -1, 1)$$

Cherchons alors à exprimer β et γ en fonction de x et y :

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma = x \\ \beta - \gamma = y \\ \beta + \gamma = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\gamma = x - y \\ \beta - \gamma = y \\ 2\gamma = -y + z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \\ \beta = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - z = 0. \end{cases}$$

Dans le dernier système écrit, la condition sur la dernière ligne est exactement celle qui doit être satisfaite pour garantir que v est combinaison linéaire de v_2 et v_3 : c'est une équation du plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$. On a donc identifié les valeurs de β et γ en fonction de x et y, ce qui permet d'écrire la décomposition de v sur $\mathcal{B}$ sous la forme suivante :

$$v = 0v_1 + (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y)v_2 + (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}y)v_3 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = 0(0, 2, -7) + (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}y)(1, 1, 1) + (\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}y)(2, -1, 1).$$

On en déduit :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver une base $\mathcal{B}$ du plan vectoriel V d'équation $3x - 5y + z = 0$ vérifiant que :

$$\forall v = (x, y, z) \in V, \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 3y \end{pmatrix}.$$

Indication : on pourra commencer par produire une base de V (sans la condition supplémentaire).

Solution: L'idée que l'on exploite ici est de choisir dans un premier temps une base $\mathcal{B}'$ de V sans se soucier de la condition supplémentaire puis, dans un second temps, de modifier $\mathcal{B}'$ pour finalement satisfaire cette condition. Partons par exemple de :

$$\mathcal{B}' = (1, 0, -3), (0, 1, 5)$$

(ces deux triplets appartiennent bien à V et ils ne sont pas proportionnels). Grâce à la décomposition :

$$v = (x, y, z) = (x, y, -3x + 5y) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, 5)$$

on voit que, dans la base $\mathcal{B}'$ de V que l'on a choisie, on a :

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En appelant Q la matrice de changement de coordonnées de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ (que l'on recherche) on obtient alors :

$$[v]_{\mathcal{B}} = Q[v]_{\mathcal{B}'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est donc :

$$P = Q^{-1} = \tfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathcal{B}$ recherchée est construite à partir de $\mathcal{B}'$ en utilisant les coefficients dans les colonnes de cette matrice. Autrement dit :

$$\mathcal{B} = \underbrace{(\tfrac{3}{7}, -\tfrac{1}{7}, -2)}_{\frac{3}{7}(1,0,-3)-\frac{1}{7}(0,1,5)} \quad , \quad \underbrace{(\tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, 1)}_{\frac{1}{7}(1,0,-3)+\frac{2}{7}(0,1,5)} \quad .$$

Pour vérifier notre résultat, on peut effectivement contrôler que les triplets $(\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, -2)$ et $(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1)$ appartiennent à V, car :

$$3\cdot\tfrac{3}{7} - 5\cdot(-\tfrac{1}{7}) + (-2) = 0 \quad \text{et} \quad 3\cdot\tfrac{1}{7} - 5\cdot\tfrac{2}{7} + 1 = 0$$

qu'ils ne sont pas proportionnels (si bien qu'ils forment une base de V), et que, pour tout élément $v = (x, y, z)$ de V, on a :

$$(2x-y)(\tfrac{3}{7}, -\tfrac{1}{7}, -2) + (x+3y)(\tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, 1) = (\tfrac{6}{7}x - \tfrac{3}{7}y + \tfrac{1}{7}x + \tfrac{3}{7}y, -\tfrac{2}{7}x + \tfrac{1}{7}y + \tfrac{2}{7}x + \tfrac{6}{7}y, \underbrace{-4x+2y+x+3y}_{=z \text{ car } 3x-5y+z=0}) = (x, y, z).$$

Donnons à présent une autre méthode de résolution. Supposons qu'une telle base $\mathcal{B} = v_1, v_2$ de V existe. On a alors :

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela permet de trouver v_1 et v_2 en résolvant deux systèmes linéaires. Pour v_1 par exemple, on résout :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x = -3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -7y = 1 \\ x = -3y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Comme v_1 se trouve sur V, son "z" est égal à "$-3x + 5y$", ce qui montre que nécessairement :

$$v_1 = (\tfrac{3}{7}, -\tfrac{1}{7}, -3\cdot(\tfrac{3}{7}) + 5\cdot(-\tfrac{1}{7})) = (\tfrac{3}{7}, -\tfrac{1}{7}, -2).$$

En raisonnant de même pour v_2, on trouve qu'il est nécessairement égal à $(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1)$. On peut alors raisonner comme ci-dessus pour vérifier que $\mathcal{B}$ est bien une base de V et qu'elle est solution du problème posé.

Exercice 6. Si c'est possible, déterminer une base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

a. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ est le plan vectoriel d'équation $2x + y + 2z = 0$.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, $\text{Vect}(v_2, v_3)$ contient $(4, 1, 3)$ et $(-6, 5, 2)$.

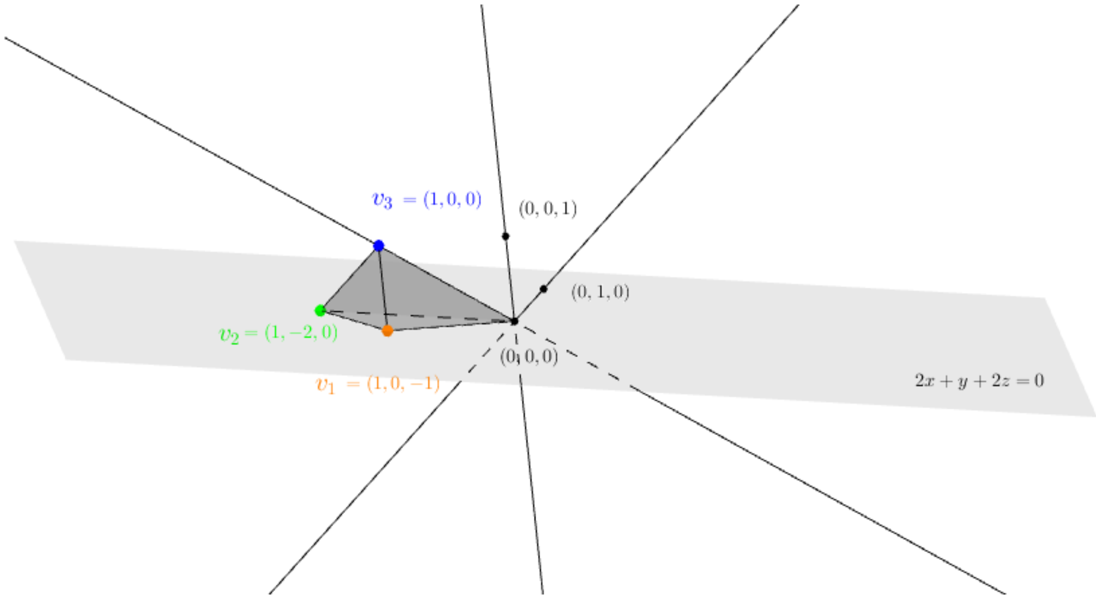
c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément :

$$[(0,0,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Solution:

a. Il suffit ici de choisir une base v_1, v_2 du plan vectoriel d'équation $2x+y+2z = 0$ (autrement dit, deux triplets non proportionnels satisfaisant l'équation) et de la compléter par un triplet v_3 en dehors de ce plan (c'est-à-dire qui ne satisfait pas l'équation). On peut donc par exemple poser :

$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (1, -2, 0) \text{ et } v_3 = (1, 0, 0).$$



b. Comme $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ est un plan vectoriel et $(4,1,3)$ et $(-6,5,2)$ ne sont pas proportionnels, la condition supplémentaire signifie en fait que ces deux éléments forment une base de $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$. Il s'agit donc du plan vectoriel d'équation :

$$\begin{vmatrix} x & 4 & -6 \\ y & 1 & 5 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{-13x - 26y + 26z}_{-13(x+2y-2z)} = 0.$$

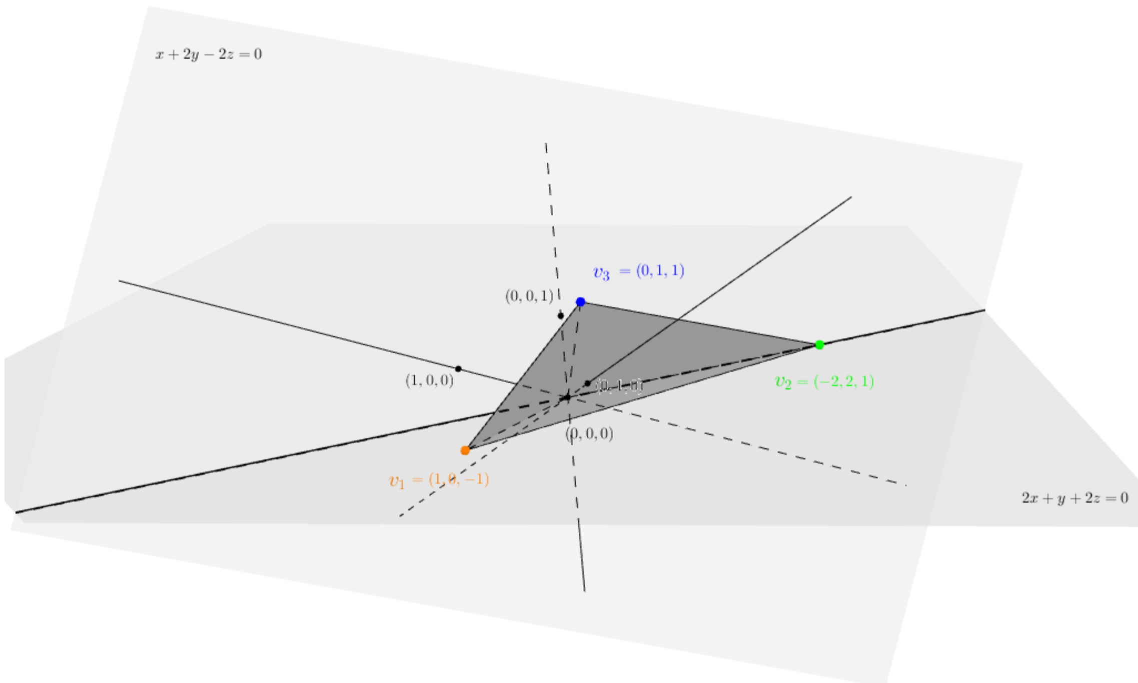
Le triplet v_2 se trouvant sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$, il doit donc satisfaire :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y) = 0 \\ 2z = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Posons alors par exemple $v_2 = (-2, 2, 1)$. Pour produire la base $\mathcal{B}$, il reste à choisir un élément v_1 sur le plan vectoriel d'équation $2x + y + 2z = 0$ qui ne soit pas proportionnel à v_2, comme par exemple $v_1 = (1, 0, -1)$ et un élément v_3 sur le plan vectoriel d'équation $x + 2y - 2z = 0$ qui ne soit pas proportionnel à v_2, comme par exemple $v_3 = (0, 1, 1)$. La famille :

$$v_1 = (1, 0, -1),\ v_2 = (-2, 2, 1),\ v_3 = (0, 1, 1)$$

est donc solution du problème posé.



c. Le problème posé n'admet aucune solution. En effet, supposons qu'une telle base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ existe. Par définition même des coordonnées dans une base, on aurait alors :

$$(0,0,1) = 11v_2 - 7v_3$$

si bien que $(0,0,1)$ serait élément de $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$. Or d'après la condition supplémentaire introduite au b., ce plan vectoriel a pour équation $x + 2y - 2z = 0$, et cette équation n'est pas satisfaite par $(0,0,1)$.

Exercice 7. Est-il vrai que, pour tout choix d'éléments v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ on a :

a. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cup \mathrm{Vect}(v_2, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$?

b. si $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors v_1, v_2, v_3 l'est aussi.

c. $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1)$?

d. si v_1, v_2, v_3 est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1$ l'est aussi.

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Solution:

a. C'est faux. Prenons par exemple :

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1).$$

Alors $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ n'est pas égal à la réunion de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ (qui est le plan vectoriel d'équation $z = 0$) et de $\mathrm{Vect}(v_2, v_3)$ (qui est le plan vectoriel d'équation $x = 0$) : par exemple, $(1,0,1)$ appartient à $\mathbb{R}^3$ mais pas à la réunion (il n'a "ni son x ni son z nul").

b. C'est vrai. En effet, si v_1, v_2, v_3 se trouvaient sur un même plan vectoriel, alors $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3$ s'y trouveraient aussi, si bien que cette famille ne pourrait être une base de $\mathbb{R}^3$. L'hypothèse entraine donc que v_1, v_2, v_3 ne se trouvent pas sur un même plan vectoriel, ou, autrement dit, qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

c. C'est faux. Prenons par exemple :

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,1,0).$$

Alors :

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_3) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \cap \mathrm{Vect}(v_1, v_3)$$

est le plan vectoriel d'équation $z = 0$. Cet ensemble est différent de $\mathrm{Vect}(v_1)$, qui est une droite vectorielle.

d. C'est faux. Prenons par exemple :

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1)$$

et posons :

$$w_1 = v_1 - v_2 = (1,-1,0),\ w_2 = v_2 - v_3 = (0,1,-1),\ w_3 = (-1,0,1).$$

Cette famille n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$: tous ses éléments se trouvent sur le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 8. Trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ sachant que $(2\alpha^2 - 1, \alpha, 2 - 4\alpha)$ n'est pas combinaison linéaire de la famille :

$$(1,2,-1),\ (-1, \alpha - 2, \alpha + 1),\ (2\alpha, 4\alpha - 1, -\alpha - 2).$$

Solution: Commençons par calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\alpha \\ 2 & \alpha - 2 & 4\alpha - 1 \\ -1 & \alpha + 1 & -\alpha - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & \alpha - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ \alpha & \alpha - 2 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha - 1).$$

Par conséquent, si $\alpha \neq 0, 1$, la famille proposée est une base de $\mathbb{R}^3$. Une telle valeur de α ne convient donc pas pour le problème posé, car alors tout élément de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de la famille (et donc en particulier celui donné dans l'énoncé). A ce stade, il reste donc deux candidats solutions pour α, à savoir 0 et 1. Etudions alors le cas $\alpha = 0$. On doit décider si $(-1, 0, 2)$ est combinaison linéaire de :

$$(1,2,-1),\ (-1,-2,1),\ (0,-1,-2),$$

ou, ce qui revient au même, du fait que $(-1,-2,1) = -(1,2,-1)$, de :

$$(1,2,-1),\ (0,-1,-2),$$

Or, en combinant ces deux éléments, la seule manière de mettre la première coordonnée à -1 et la deuxième à 0 est de former la combinaison linéaire :
$$-(1,2,-1)-2(0,-1,-2)=(-1,0,5)\neq(-1,0,2).$$
Par conséquent, la valeur $\alpha=0$ est solution du problème posé. Pour $\alpha=1$, on doit regarder si $(1,1,-2)$ est combinaison linéaire de :
$$(1,2,-1),\ (-1,-1,2),\ (2,3,-3),$$
ce qui est clairement le cas (il est égal à l'opposé du deuxième élément). On en déduit que $\alpha=1$ ne convient pas. En conclusion, la seule solution au problème posé est $\alpha=0$.