Série 3

Exercice 1. Déterminer le rang la matrice A ci-dessous et en écrire une décomposition colonne-ligne minimale :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -14 & 21 & -7 \\ 10 & -15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution: La matrice A est non nulle. De plus, ses trois colonnes sont deux-à-deux proportionnelles. Par exemple, on peut écrire les deux premières colonnes comme multiples scalaires de la troisième :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -15 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que A est de rang 1. Les relations de proportionnalité écrites ci-dessus permettent alors directement d'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -14 & 21 & -7 \\ 10 & -15 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A. Quel est le rang de A ?

b. Donner une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Solution:

a. Utilisons par exemple le -1 en position $(1,2)$ pour "nettoyer" la première ligne, via les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2$ et $C_3 \leftarrow C_3 + 5C_2$. On trouve

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 16 & 5 & 32 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{-(-1)\left|\begin{smallmatrix} 16 & 32 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = 0.$$

La dernière égalité peut aussi être obtenue en observant qu'une fois appliquée les deux opérations ci-dessus, on a fait apparaitre une relation de proportionnalité entre la première et la troisième colonne :

$$2 \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est nul : son rang est donc inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, les lignes de A ne sont pas deux-à-deux proportionnelles (de même que ses colonnes) : cette matrice n'est donc ni de rang 0, ni de rang 1. On en déduit qu'elle est de rang 2.

b. Pour écrire une décomposition colonne-ligne minimale de A (c'est-à-dire de longueur 2), on va chercher à exprimer l'une de ses colonnes en fonction des deux autres. Or, en utilisant la relation de proportionnalité identifiée en a. on trouve :

$$2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient finalement :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}}_{2\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer la matrice inverse A^{-1}.

Solution:

a. Commençons par effectuer l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, qui laisse invariant le déterminant. On trouve :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, appliquons l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ afin de faire apparaitre une matrice triangulaire supérieure, pour laquelle le déterminant n'est autre que le produit des coefficients diagonaux :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

b. Pour trouver l'inverse, il existe plusieurs méthodes. Une première méthode consiste à partir de la matrice A et à faire apparaitre la matrice identité I_3 en appliquant successivement des opérations élémentaires sur les lignes. Par exemple, les opérations :

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1\,,\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2\,,\ L_3 \leftarrow -L_3\,,\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3\,,\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3\,,\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

mènent à la suite de matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

En appliquant exactement la même suite d'opérations sur la matrice identité I_3 on obtient alors la matrice inverse de A :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \dots$$

$$\dots \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 13 & -5 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Une deuxième méthode consiste à effectuer un travail similaire sur les colonnes de A. Enfin, une troisième méthode consiste à résoudre de manière générale le système linéaire 3×3 de matrice A :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ -x + y + 6z = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ 3y + 5z = a + c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \cdots$$

$$\cdots \begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ -z = a - 3b + c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2y + z + a = -4a + 13b - 5c \\ y = b - 2z = 2a - 5b + 2c \\ z = -a + 3b - c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 13 & -5 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. On propose ci-dessous un raisonnement pour inverser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

≪ On dispose côte-à-côte la matrice A et la matrice identité I_3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on effectue sur ces deux matrices les opérations élémentaires suivantes, simultanément :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2,\ C_1 \leftrightarrow C_3.$$

On trouve les deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

L'inverse A^{-1} de A est alors la matrice écrite sur la droite. ≫

a. Le résultat obtenu est-il juste ? Justifier.

b. Traduire le processus décrit à l'aide de matrices élémentaires.

c. Expliquer comment corriger l'erreur commise pour obtenir la vraie valeur de A^{-1}.

Solution:

a. Le raisonnement proposé est erroné, comme on peut s'en convaincre rapidement en calculant par exemple le produit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 4 & 9 & -40 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

b. Introduisons les matrices élémentaires correspondant aux opérations proposées :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplier à gauche / droite une matrice 3×3 par l'une de ces matrices élémentaires revient à effectuer l'opération correspondante sur les lignes / colonnes de cette matrice. Détaillons alors les étapes du raisonnement proposé. Tout d'abord, on applique aux deux matrices l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$. On obtient :

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, c'est au tour de l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient :

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Passons à l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$. On obtient :

$$E_3 E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \quad E_3 E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la dernière étape consiste à appliquer l'opération $C_1 \leftrightarrow C_3$ c'est-à-dire, matriciellement, à calculer :

$$E_3 E_2 E_1 A E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad | \quad E_3 E_2 E_1 E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}.$$

c. Aucune erreur de calcul ne s'est glissée dans le raisonnement mais plutôt une erreur d'interprétation de ces calculs. En effet, l'erreur consiste à interpréter l'égalité :

$$E_3E_2E_1AE_4 = I_3$$

en disant que le produit $E_3E_2E_1E_4$ (c'est-à-dire la matrice qui se trouve sur la droite à la fin du processus) est l'inverse de A. Or la bonne façon d'interpréter ce résultat est plutôt de dire que :

$$E_3E_2E_1A = E_4^{-1} \quad \text{et donc} \quad E_4E_3E_2E_1A = I_3.$$

Autrement dit, l'inverse A^{-1} de A est en fait la matrice $E_4E_3E_2E_1$. On l'obtient en appliquant à la matrice $E_3E_2E_1$ (calculée à l'avant-dernière étape) l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$. On trouve alors :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, déterminer à quelle condition sur $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la matrice proposée est inversible et, sous cette condition, calculer l'inverse :

a. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \beta & 0 \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

Solution:

a. On a :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = -\alpha\beta\gamma.$$

La condition pour que la matrice proposée soit inversible est donc que le produit $\alpha\beta\gamma$ soit non nul, ou autrement dit que chacun des coefficients α, β, γ soit non nul. Pour trouver sous cette condition l'inverse, partons de la matrice donnée et faisons apparaitre la matrice identité I_3 en appliquant successivement des opérations élémentaires sur les colonnes. Par exemple, les opérations :

$$C_1 \leftrightarrow C_3\,,\ C_1 \leftarrow \tfrac{1}{\alpha}C_1\,,\ C_2 \leftarrow \tfrac{1}{\beta}C_2\,,\ C_3 \leftarrow \tfrac{1}{\gamma}C_3$$

mènent à la suite de matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

En appliquant exactement la même suite d'opérations sur la matrice identité I_3 on obtient :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse recherché est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\gamma} \\ 0 & \frac{1}{\beta} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Commençons par calculer le déterminant de la matrice proposée. En développant selon la première ligne, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma.$$

La condition pour que cette matrice soit inversible est donc la même qu'en a. : le produit $\alpha\beta\gamma$ doit être non nul, ou, autrement dit, chacun des coefficients α, β, γ doit être non nul. Sous cette condition, pour trouver l'inverse, partons de la matrice donnée et faisons apparaitre la matrice identité I_3 en appliquant successivement des opérations élémentaires sur les lignes. Par exemple, les opérations :

$$L_2 \leftrightarrow L_3\,,\ L_1 \leftrightarrow L_3\,,\ L_1 \leftarrow \tfrac{1}{\gamma}L_1\,,\ L_2 \leftarrow \tfrac{1}{\alpha}L_2\,,\ L_3 \leftarrow \tfrac{1}{\beta}L_3$$

mènent à la suite de matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\0&0&\beta\\\gamma&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\\gamma&0&0\\0&0&\beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\gamma&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3.$$

En appliquant exactement la même suite d'opérations sur la matrice identité I_3 on obtient :

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\gamma}\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\gamma}\\\frac{1}{\alpha}&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\gamma}\\\frac{1}{\alpha}&0&0\\0&\frac{1}{\beta}&0\end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse recherché est :

$$\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{\gamma}\\\frac{1}{\alpha}&0&0\\0&\frac{1}{\beta}&0\end{pmatrix}.$$

c. Commençons par calculer le déterminant de la matrice proposée. En développant selon la première ligne, on trouve :

$$\begin{vmatrix}\alpha&0&0\\\beta&\beta&0\\\gamma&\gamma&\gamma\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\beta&0\\\gamma&\gamma\end{vmatrix}=\alpha\beta\gamma.$$

La condition pour que cette matrice soit inversible est donc la même qu'en a. et b. : le produit $\alpha\beta\gamma$ doit être non nul, ou, autrement dit, chacun des coefficients α,β,γ doit être non nul. Sous cette condition, pour trouver l'inverse, on peut par exemple résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\\beta&\beta&0\\\gamma&\gamma&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\alpha x=a\\\beta x+\beta y=b\\\gamma x+\gamma y+\gamma z=c\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\frac{1}{\alpha}a\\y=\frac{1}{\beta}b-\frac{1}{\alpha}a\\z=\frac{1}{\gamma}c-\frac{1}{\beta}b\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}&0&0\\-\frac{1}{\alpha}&\frac{1}{\beta}&0\\0&-\frac{1}{\beta}&\frac{1}{\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'inverse recherché est :

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\alpha}&0&0\\-\frac{1}{\alpha}&\frac{1}{\beta}&0\\0&-\frac{1}{\beta}&\frac{1}{\gamma}\end{pmatrix}.$$

Exercice 6. On donne, en fonction de $\alpha\in\mathbb{R}$, la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}-\alpha&\alpha+1&-1\\\alpha^2-2\alpha-1&\alpha^2+\alpha+2&\alpha-3\\\alpha^2+2\alpha-1&-1-3\alpha&\alpha+1\end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de A en fonction de la valeur du paramètre α, ainsi qu'une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Solution: Cherchons à calculer le déterminant de la matrice A. Pour cela, commençons par effectuer l'opération $C_1\leftarrow C_1-\alpha C_3$, qui ne modifie pas le déterminant. On obtient :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-\alpha&\alpha+1&-1\\\alpha^2-2\alpha-1&\alpha^2+\alpha+2&\alpha-3\\\alpha^2+2\alpha-1&-1-3\alpha&\alpha+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\alpha+1&-1\\\alpha-1&\alpha^2+\alpha+2&\alpha-3\\\alpha-1&-1-3\alpha&\alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha-1)\begin{vmatrix}0&\alpha+1&-1\\1&\alpha^2+\alpha+2&\alpha-3\\1&-1-3\alpha&\alpha+1\end{vmatrix},$$

la dernière égalité étant obtenue par extraction du facteur $\alpha-1$ de la première colonne. Appliquons ensuite l'opération $L_2\leftarrow L_2-L_3$ et développons selon la première colonne. On trouve :

$$\det(A)=(\alpha-1)\begin{vmatrix}0&\alpha+1&-1\\0&\alpha^2+4\alpha+3&-4\\1&-1-3\alpha&\alpha+1\end{vmatrix}=(\alpha-1)\begin{vmatrix}\alpha+1&-1\\\alpha^2+4\alpha+3&-4\end{vmatrix}.$$

Sur le déterminant 2×2 obtenu, effectuons à présent l'opération $L_2\leftarrow L_2-4L_1$. On trouve alors :

$$\det(A)=(\alpha-1)\begin{vmatrix}\alpha+1&-1\\\alpha^2-1&0\end{vmatrix}=(\alpha-1)^2(\alpha+1).$$

On en déduit déjà que si α est différent de 1 et -1 alors le déterminant de A est non nul, si bien que A est de rang 3. Dans ce cas une décomposition colonne-ligne minimale de A est par exemple donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha+1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2-2\alpha-1 & \alpha^2+\alpha+2 & \alpha-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2+2\alpha-1 & -1-3\alpha & \alpha+1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = 1$, la matrice A vaut :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

On observe qu'elle est non nulle et que ses lignes sont deux-à-deux proportionnelles (tout comme ses colonnes). Elle est donc de rang 1, et une décomposition colonne-ligne minimale de A est par exemple donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = -1$, la matrice A vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est de rang inférieur ou égal à 2 (car son déterminant est nul). De plus A est non nulle et ses lignes ne sont pas deux-à-deux proportionnelles (tout comme ses colonnes). Elle n'est donc ni de rang 0, ni de rang 1. Par conséquent, elle est de rang 2. Pour écrire une décomposition colonne-ligne minimale de A, partons de la décomposition :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(qui n'est pas minimale car de longueur 3) et observons par exemple que la troisième colonne est égale à la somme des autres, multipliée par -1. On obtient alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère un système linéaire 3×3 dont on note A la matrice des coefficients :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = a \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = b \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z = c \end{cases}$$

a. En supposant que (x, y, z) est solution, calculer les déterminants suivants en fonction de x, y et z :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & a & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & b & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & c & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & a \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & b \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & c \end{vmatrix}.$$

b. Sous l'hypothèse que $\det(A) \neq 0$, en déduire une formule générale pour la matrice inverse A^{-1} de A.

Solution:

a. Cherchons par exemple à calculer le premier déterminant (les deux autres se calculent exactement de la même manière) :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Comme (x, y, z) est solution du système, on a déjà :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Sur le déterminant obtenu, appliquons à présent les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - yC_2$ et $C_1 \leftarrow C_1 - zC_3$. On trouve :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}x & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1}x & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1}x & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}.$$

On peut alors extraire le facteur x de la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = x \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}}_{\det(A)}.$$

b. Supposons que le déterminant de A est non nul. Dans ce cas, on sait que le système possède une unique solution pour tout choix de second membre. A est inversible et la matrice inverse vérifie :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Or, le résultat obtenu en a. permet de décrire x en fonction de a, b et c. En effet, on a :

$$x = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ b & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ c & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det(A)} (\begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} c)$$

la dernière égalité étant obtenue en développant par rapport à la première colonne. Nous venons en fait donc de découvrir la formule pour la première ligne de A^{-1}. En raisonnant de même pour la deuxième et la troisième ligne on trouve finalement :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Cette formule porte le nom du mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752).