Série 2

Exercice 1. Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

a. Quel est le rang de A ?

b. Ecrire des décompositions colonne-ligne minimales de A.

Solution:

a. La matrice A est de rang 1. En effet, elle est non nulle et ses deux lignes sont proportionnelles : par exemple, on passe de la première à la deuxième en multipliant par le facteur $-\frac{1}{3}$. On peut aussi constater que ses colonnes sont proportionnelles : par exemple, on obtient la première colonne en multipliant la deuxième par $-\frac{3}{2}$. Une autre option est de voir que le déterminant de A est nul :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 3 \cdot \tfrac{2}{3} - (-1) \cdot (-2) = 0.$$

b. Exploitons les relations de proportionnalités identifiées au a., comme par exemple :

$$-\tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Une telle décomposition n'est pas unique. Par exemple, en exprimant que la première ligne de A est égale à -3 fois la deuxième ligne on trouve cette fois :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Si l'on exprime que la deuxième colonne de A est obtenue en multipliant la première par $-\frac{2}{3}$ on obtient :

$$-\tfrac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Exercice 2. Dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de A.

b. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

Solution:

a. Par définition du déterminant, on trouve :

$$\det(A) = (-5) \cdot 1 - (-4) \cdot 2 = 3.$$

b. Comme le déterminant de A est non nul, on voit que la matrice A est inversible. Appliquons alors la formule pour l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Vérifions notre résultat en calculant par exemple le produit suivant :

$$A^{-1}A = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Exercice 3. Dans $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ -3 & -12 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Quel est le rang de A ?

b. Donner une décomposition colonne-ligne minimale de A.

Solution:

a. La matrice A est de rang 2. En effet, ses deux lignes ne sont pas proportionnelles :

$$\frac{-3}{2} = \frac{-12}{8} \neq \frac{0}{-4}.$$

On peut aussi observer que ses colonnes ne sont pas deux-à-deux proportionnelles. En effet, si les deux premières le sont (on obtient la deuxième en multipliant la première par 4), il n'en est pas de même de la première et de la troisième, ou de la deuxième et la troisième. On peut aussi constater que parmi les trois déterminants 2×2 extraits de A :

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -3 & -12 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -12\,, \quad \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -48$$

certains sont non nuls.

b. Voici quelques décompositions colonne-ligne minimales de A :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -12 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \cdots$$

Remarquons qu'en utilisant les colonnes de A on obtient une décomposition colonne-ligne qui n'est pas minimale :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Pour en réduire la longueur, on peut utiliser la relation de proportionnalité suivante entre les deux premières colonnes de A :

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

Solution: Il y a plusieurs méthodes pour aborder le calcul d'un déterminant : application directe de la formule, développement par rapport à une ligne ou une colonne, ou encore utilisation des propriétés globales de la fonction déterminant (extraction d'un facteur apparaissant dans une ligne ou une colonne donnée / antisymétrie / invariance par ajout à une ligne ou une colonne d'un multiple scalaire d'une autre ligne ou colonne). Le plus efficace étant par ailleurs souvent de combiner ces différentes approches.

a. Développons le déterminant proposé selon la première colonne. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60.$$

b. En effectuant successivement les opérations $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ (dont on sait qu'elles ne modifient pas le déterminant), on trouve :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

La dernière égalité est obtenue par exemple en développant selon la dernière colonne, ou encore par extraction du facteur 0 de la troisième colonne.

c. L'idée développée ici est d'utiliser le 1 qui se trouve en position $(2, 2)$ pour "nettoyer" la deuxième colonne (c'est-à-dire créer des 0 ailleurs dans cette colonne). Pour cela, effectuons les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$ (on a vu au cours que de telles opérations ne changent pas la valeur du déterminant). On obtient :

$$\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 23 \\ 3 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 27 \end{vmatrix}.$$

En développant maintenant selon la deuxième colonne, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -6 \\ 17 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 23 \\ 2 & 27 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 23 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = 2(27 - 23) = 8.$$

Exercice 5. Sachant que :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = 3\,,$$

calculer chacun des déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha + 2\lambda & \beta + 2\mu & \gamma + 2\sigma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 2\beta & \gamma & \alpha \\ 2\mu & \sigma & \lambda \\ 2\varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3(\delta - \varepsilon) & 3\rho & \varepsilon \\ \alpha - \beta & \gamma & \frac{1}{3}\beta \\ \lambda - \mu & \sigma & \frac{1}{3}\mu \end{vmatrix}$.

Solution: L'idée exploitée ici est d'utiliser les propriétés connues de la fonction déterminant afin de relier le déterminant qui nous intéresse à celui donné initialement.

a. On a :

$$\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha + 2\lambda & \beta + 2\mu & \gamma + 2\sigma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & \rho \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = -3,$$

la première égalité étant obtenue via l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ et la deuxième par l'échange de L_1 et L_2.

b. Cette fois-ci, on trouve :

$$\begin{vmatrix} 2\beta & \gamma & \alpha \\ 2\mu & \sigma & \lambda \\ 2\varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \mu & \sigma & \lambda \\ \varepsilon & \rho & \delta \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \alpha \\ \varepsilon & \rho & \delta \\ \mu & \sigma & \lambda \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ \varepsilon & \delta & \rho \\ \mu & \lambda & \sigma \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = -6,$$

la première égalité étant obtenue par extraction du facteur 2 de la première colonne, puis les suivantes par les opérations $L_2 \leftrightarrow L_3$, $C_2 \leftrightarrow C_3$ et $C_1 \leftrightarrow C_2$ (ce qui change le signe à chaque fois).

c. On trouve ici :

$$\begin{vmatrix} 3(\delta - \varepsilon) & 3\rho & \varepsilon \\ \alpha - \beta & \gamma & \frac{1}{3}\beta \\ \lambda - \mu & \sigma & \frac{1}{3}\mu \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3(\delta - \varepsilon) & 3\rho & 3\varepsilon \\ \alpha - \beta & \gamma & \beta \\ \lambda - \mu & \sigma & \mu \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3\delta & 3\rho & 3\varepsilon \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \lambda & \sigma & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta & \rho & \varepsilon \\ \alpha & \gamma & \beta \\ \lambda & \sigma & \mu \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \beta \\ \delta & \rho & \varepsilon \\ \lambda & \sigma & \mu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \rho \\ \lambda & \mu & \sigma \end{vmatrix} = 3.$$

Dans cette suite d'égalités, on commence par extraire le facteur $\frac{1}{3}$ de la troisième colonne, on additionne la troisième colonne à la première, on extrait le facteur 3 de la première ligne, puis on échange successivement les deux premières lignes entre elles et les deux dernières colonnes entre elles.

Exercice 6. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

Solution: On commence par extraire le facteur 10, qui est clairement commun à tous les coefficients sur la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

On effectue alors l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ dans le déterminant restant, ce qui n'en modifie pas la valeur :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 10 & 10 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

On peut alors extraire le facteur 10 de la deuxième ligne pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on applique l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ pour trouver :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix}.$$

En développant selon la première ligne on obtient maintenant :

$$\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 11 & 12 & 13 \\ 113 & 125 & 138 \end{vmatrix} = 100(- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 113 & 138 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 113 & 125 \end{vmatrix}) = 100(-25 + 2 \cdot 12) = -100.$$

Exercice 7. On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\alpha & 1+2\alpha \\ 8\alpha - \alpha^2 & \alpha^2 - 6\alpha - 4 \end{pmatrix}.$$

a. Pour quelle(s) valeur(s) de α la matrice A est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

b. Déterminer le rang de A en fonction de la valeur du paramètre α.

Solution:

a. Commençons par calculer le déterminant de A en fonction de α (opération $C_2 \leftarrow C_1 + C_2$, puis extraction du facteur 2 de la deuxième colonne, puis $C_1 \leftarrow C_1 + \alpha C_2$) :

$$\begin{vmatrix} 1-2\alpha & 1+2\alpha \\ 8\alpha-\alpha^2 & \alpha^2-6\alpha-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2\alpha & 2 \\ 8\alpha-\alpha^2 & 2\alpha-4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1-2\alpha & 1 \\ 8\alpha-\alpha^2 & \alpha-2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 6\alpha & \alpha-2 \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = 2((1-\alpha)(\alpha-2) - 6\alpha) = 2(-\alpha^2 - 3\alpha - 2) = -2(\alpha+1)(\alpha+2).$$

La matrice A est donc inversible si et seulement si α est différent de -1 et -2 (c'est-à-dire si et seulement si le déterminant est non nul). On a alors, d'après la formule vue au cours pour l'inverse d'une matrice 2×2 :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2(\alpha+1)(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha^2-6\alpha-4 & -1-2\alpha \\ \alpha^2-8\alpha & 1-2\alpha \end{pmatrix}$$

(les deux coefficients diagonaux ont été échangés, les deux coefficients hors de la diagonale sont restés au même emplacement mais ont été multipliés par -1, et on a multiplié globalement par l'inverse du déterminant).

b. D'après le a., on sait que si α est différent de -1 et -2 alors la matrice A est de déterminant non nul, c'est-à-dire qu'elle est de rang 2. Pour $\alpha = -1$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que A est de rang 1 dans ce cas. En effet, elle est non nulle et ses deux lignes sont proportionnelles : on passe de la première à la deuxième en multipliant par -3 (et de même pour les colonnes, on passe de la première à la deuxième en multipliant par $-\frac{1}{3}$). Pour $\alpha = -2$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -20 & 12 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que A est aussi de rang 1 dans ce cas. En effet, elle est non nulle et ses deux lignes sont proportionnelles : on passe de la première à la deuxième en multipliant par -4 (et de même pour les colonnes, on passe de la première à la deuxième en multipliant par $-\frac{3}{5}$).

Exercice 8. Etant donnés $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ ou } \alpha = \beta = \gamma.$$

Indication : que vaut la somme des lignes dans le déterminant étudié ?

Solution: Calculons le déterminant étudié, en essayant au maximum de l'obtenir sous forme factorisée. Commençons par effectuer successivement les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, qui ne modifient pas la valeur du déterminant. On trouve alors :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

la dernière égalité étant obtenue en extrayant le facteur $\alpha + \beta + \gamma$ de la troisième ligne. Effectuons à présent les opérations $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$, puis développons par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \gamma & \alpha-\gamma & \beta-\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha-\gamma & \beta-\gamma \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)((\beta-\alpha)(\beta-\gamma) + (\alpha-\gamma)^2).$$

Finalement, on obtient donc :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma).$$

On voit que ce déterminant est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul. En réécrivant le deuxième sous la forme :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma = \tfrac{1}{2}((\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2)$$

on voit que celui-ci est nul si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$, ce qui permet de conclure.

Exercice 9. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\beta_{1,1} + \alpha_{1,2}\beta_{2,1} & \alpha_{1,1}\beta_{1,2} + \alpha_{1,2}\beta_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\beta_{1,1} + \alpha_{2,2}\beta_{2,1} & \alpha_{2,1}\beta_{1,2} + \alpha_{2,2}\beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

si bien que :

$$\det(AB) = (\alpha_{1,1}\beta_{1,1} + \alpha_{1,2}\beta_{2,1})(\alpha_{2,1}\beta_{1,2} + \alpha_{2,2}\beta_{2,2}) - (\alpha_{1,1}\beta_{1,2} + \alpha_{1,2}\beta_{2,2})(\alpha_{2,1}\beta_{1,1} + \alpha_{2,2}\beta_{2,1}) = \cdots$$

$$\cdots = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{1,1}\beta_{2,2} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\beta_{1,2}\beta_{2,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{1,2}\beta_{2,1} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\beta_{1,1}\beta_{2,2}.$$

D'autre part :

$$\det(A)\det(B) = (\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1})(\beta_{1,1}\beta_{2,2} - \beta_{1,2}\beta_{2,1}) = \cdots$$

$$\cdots = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{1,1}\beta_{2,2} + \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\beta_{1,2}\beta_{2,1} - \alpha_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{1,2}\beta_{2,1} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}\beta_{1,1}\beta_{2,2}.$$

On en déduit donc bien que que :

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$