# Série 1

**Exercice 1.** Dans chacun des cas, effectuer le calcul matriciel proposé :

a. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ c. ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Solution:

a. Par définition de l'addition matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

b. Par définition de l'addition et de la multiplication scalaire sur les matrices, on trouve :

$$2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c. Par définition de la transposée :

$${}^t\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** Dans chacun des cas, calculer si possible le produit proposé :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a. Le produit proposé est bien défini. Le résultat est une matrice $1 \times 1$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3) = (8).$$

b. Le produit proposé est bien défini. Le résultat est une matrice $3 \times 1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot 6 + 0 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 6 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

c. Le produit proposé est bien défini. Le résultat est une matrice $2 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 & 4 \cdot 5 \\ 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 20 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

d. Le produit proposé n'est pas défini car le nombre de colonnes de la matrice de gauche n'est pas égal au nombre de lignes de la matrice de droite. En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ possède deux colonnes et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ une seule ligne.

**Exercice 3.** Dans $\mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, on donne la matrice :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

a. Appliquer sur cette matrice les opérations élémentaires suivantes :

$$C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2,\ L_1 \leftrightarrow L_2,\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1,\ C_2 \leftarrow 2C_2.$$

b. Faire voir le processus du a. comme des multiplications successives par des matrices élémentaires (que l'on donnera).

Solution:

a. En appliquant ces opérations élémentaires, on obtient la suite de matrices suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -14 & -5 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ -14 & -10 & 17 \end{pmatrix}$$

b. Sur une matrice de taille $2 \times 3$, les opérations élémentaires proposées correspondent aux multiplications (à gauche ou à droite, selon que l'on opère sur les lignes ou les colonnes) successives par les matrices élémentaires suivantes :

$$\underbrace{E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3 \text{ modifiée par } C_1 \leftarrow C_1 + 3C_2} \quad , \quad \underbrace{E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{I_2 \text{ modifiée par } L_1 \leftrightarrow L_2} \quad , \quad \underbrace{E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2 \text{ modifiée par } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \quad , \quad \underbrace{E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3 \text{ modifiée par } C_2 \leftarrow 2C_2} .$$

Autrement dit, le processus du a. correspond au produit :

$$E_3 E_2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} E_1 E_4 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ -14 & -10 & 17 \end{pmatrix}$$

que l'on peut contrôler en repassant par les étapes intermédiaires :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} E_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$E_2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 7 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -14 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$E_3 E_2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} E_1 E_4 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -14 & -5 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ -14 & -10 & 17 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Dans chacun des cas, donner deux matrices élémentaires $E_1$ et $E_2$ vérifiant la condition donnée :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} E_1 E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ b. $E_1 E_2 \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ c. $E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution:

a. Observons les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

En appliquant à la première les opérations élémentaires :

$$C_1 \leftarrow -C_1 \text{ et } C_2 \leftarrow 2C_2$$

on obtient la deuxième. En terme de matrices élémentaires, cela veut dire que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} E_1E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \text{ où } E_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : en appliquant les deux opérations ci-dessus dans l'autre sens, c'est-à-dire $C_2 \leftarrow 2C_2$ en premier et $C_1 \leftarrow -C_1$ en deuxième on obtient le même résultat. Cela veut dire que l'on aurait aussi pu poser :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, les deux matrices élémentaires introduites ici commutent pour le produit matriciel.

b. Observons les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pour passer de la première à la deuxième, on peut appliquer les deux opérations élémentaires suivantes :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \text{ puis } L_1 \leftarrow L_1 - L_2.$$

En terme de matrices élémentaires, cela veut dire que l'on a :

$$E_1E_2 \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ où } E_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{1ère opération appliquée}} \text{ et } E_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{2ème opération appliquée}}.$$

Remarque : en appliquant les deux opérations ci-dessus dans l'autre sens, c'est-à-dire $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ en premier et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ en deuxième on obtient la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices élémentaires introduites ici ne commutent pas pour le produit matriciel.

c. Observons les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour passer de la première à la deuxième, on peut appliquer les deux opérations élémentaires suivantes :

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \text{ puis } C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1.$$

En terme de matrices élémentaires, cela veut dire que l'on a :

$$E_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.** Dans cet exercice, on souhaite identifier le *centre de* $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ qui est par définition l'ensemble :

$$Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R})) = \{A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}) \quad | \quad \forall B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}),\ AB = BA\}.$$

Comme le produit matriciel n'est pas commutatif, on sait déjà que $Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R})) \neq \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

a. On appelle *matrice scalaire* une matrice du type $\alpha I_3$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'une matrice scalaire appartient à $Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}))$.

b. Réciproquement, soit $A \in Z(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}))$. Calculer $AB$ et $BA$, avec :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire que certains coefficients de la matrice $A$ sont nuls. Utiliser ensuite d'autres cas particuliers pour $B$ afin de montrer que $A$ est une matrice scalaire.

Solution:

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Par un calcul direct, on trouve que :

$$(\alpha I_3)B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} B = \alpha B \quad \text{et} \quad B(\alpha I_3) = B \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha B.$$

Ces deux matrices étant égales pour tout choix de $B$, on voit que la matrice scalaire $\alpha I_3$ appartient au centre de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}.$$

On trouve alors, d'une part :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ \alpha_{2,1} & 0 & 0 \\ \alpha_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $AB = BA$, on voit donc que $\alpha_{1,2} = \alpha_{1,3} = \alpha_{2,1} = \alpha_{3,1} = 0$. Autrement dit, $A$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Utilisons maintenant pour $B$ la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors, d'une part :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & 0 \\ 0 & \alpha_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $\alpha_{2,3} = \alpha_{3,2} = 0$. Autrement dit, $A$ est diagonale, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Utilisons maintenant pour $B$ la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors, d'une part :

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{1,1} & 0 \\ \alpha_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{2,2} & 0 \\ \alpha_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc que $\alpha_{1,1} = \alpha_{2,2}$. Enfin, en travaillant exactement de la même manière mais avec :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on montre que $\alpha_{1,1} = \alpha_{3,3}$. En conclusion, $A$ est diagonale et tous les coefficients sur la diagonale sont égaux : c'est une matrice scalaire.

**Exercice 6.** Déterminer une matrice $X \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$X \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Indication : commencer par observer les changements sur les lignes ou les colonnes.*

Solution: Observons les deux matrices proposées :

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En essayant de produire la deuxième à partir de la première, on voit qu'il faut "faire tourner" les lignes (la première est envoyée en deuxième position, la deuxième en troisième et la troisième en première position) pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

puis "faire tourner" les colonnes (la première est envoyée cette fois en troisième position, la deuxième en première et la troisième en deuxième position). On peut alors décomposer ce processus en opérations élémentaires de la manière suivante :

$$L_1 \leftrightarrow L_2 \,,\, L_1 \leftrightarrow L_3 \,,\, C_1 \leftrightarrow C_3 \,,\, C_1 \leftrightarrow C_2.$$

En effet, ces opérations correspondent à la suite de matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En termes de matrices élémentaires, on a donc :

$$E_2 E_1 \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} E_3 E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec :

$$\underbrace{E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3 \text{ modifiée par } L_1 \leftrightarrow L_2} \,,\, \underbrace{E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{I_3 \text{ modifiée par } L_1 \leftrightarrow L_3} \,,\, \underbrace{E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{I_3 \text{ modifiée par } C_1 \leftrightarrow C_3} = E_2 \,,\, \underbrace{E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3 \text{ modifiée par } C_1 \leftrightarrow C_2} = E_1.$$

Autrement dit, on a :

$$X \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec :

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2 E_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.** Montrer que, pour toutes matrices $A, B$ et $C$ dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, on a les égalités :

a. $(A+B)+C = A+(B+C)$ b. $(A+B)C = AC+BC$ c. $(AB)C = A(BC)$.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}.$$

a. On trouve, d'une part :

$$(A+B)+C = (\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}+\beta_{1,1} & \alpha_{1,2}+\beta_{1,2} \\ \alpha_{2,1}+\beta_{2,1} & \alpha_{2,2}+\beta_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}+\beta_{1,1}+\gamma_{1,1} & \alpha_{1,2}+\beta_{1,2}+\gamma_{1,2} \\ \alpha_{2,1}+\beta_{2,1}+\gamma_{2,1}, & \alpha_{2,2}+\beta_{2,2}+\gamma_{2,2} \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$A+(B+C) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,1}+\gamma_{1,1} & \beta_{1,2}+\gamma_{1,2} \\ \beta_{2,1}+\gamma_{2,1} & \beta_{2,2}+\gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}+\beta_{1,1}+\gamma_{1,1} & \alpha_{1,2}+\beta_{1,2}+\gamma_{1,2} \\ \alpha_{2,1}+\beta_{2,1}+\gamma_{2,1}, & \alpha_{2,2}+\beta_{2,2}+\gamma_{2,2} \end{pmatrix}.$$

La propriété étudiée ici (appelée *associativité de l'addition matricielle*) est donc bien vérifiée. En fait, comme l'addition matricielle s'effectue coefficient-à-coefficient cette propriété est directement héritée de la propriété correspondante dans $\mathbb{R}$.

b. On trouve, d'une part :

$$(A+B)C = (\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}+\beta_{1,1} & \alpha_{1,2}+\beta_{1,2} \\ \alpha_{2,1}+\beta_{2,1} & \alpha_{2,2}+\beta_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\gamma_{1,1}+\beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{1,2}\gamma_{2,1}+\beta_{1,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{1,1}\gamma_{1,2}+\beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{1,2}\gamma_{2,2}+\beta_{1,2}\gamma_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\gamma_{1,1}+\beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{2,2}\gamma_{2,1}+\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{2,1}\gamma_{1,2}+\beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{2,2}\gamma_{2,2}+\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$AC+BC = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{1,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{1,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{1,2}\gamma_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{2,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{2,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{2,2}\gamma_{2,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\beta_{1,2}\gamma_{2,1} & \beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\beta_{1,2}\gamma_{2,2} \\ \beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\gamma_{1,1}+\beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{1,2}\gamma_{2,1}+\beta_{1,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{1,1}\gamma_{1,2}+\beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{1,2}\gamma_{2,2}+\beta_{1,2}\gamma_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\gamma_{1,1}+\beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{2,2}\gamma_{2,1}+\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{2,1}\gamma_{1,2}+\beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{2,2}\gamma_{2,2}+\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \end{pmatrix}$$

La propriété étudiée ici (appelée *distributivité à droite du produit matriciel sur l'addition*) est donc bien vérifiée. Son analogue à gauche l'est aussi, comme on le montre par un raisonnement similaire.

c. On trouve, d'une part :

$$(AB)C = (\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\beta_{1,1}+\alpha_{1,2}\beta_{2,1} & \alpha_{1,1}\beta_{1,2}+\alpha_{1,2}\beta_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\beta_{1,1}+\alpha_{2,2}\beta_{2,1} & \alpha_{2,1}\beta_{1,2}+\alpha_{2,2}\beta_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{1,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{1,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,1}+\alpha_{1,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{1,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{1,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{1,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,2}+\alpha_{1,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{2,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{2,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,1}+\alpha_{2,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{2,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{2,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{2,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,2}+\alpha_{2,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \end{pmatrix}$$

et, d'autre part :

$$A(BC) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{2,1} & \gamma_{2,2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\beta_{1,2}\gamma_{2,1} & \beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\beta_{1,2}\gamma_{2,2} \\ \beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{1,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{1,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,1}+\alpha_{1,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{1,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{1,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{1,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,2}+\alpha_{1,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{2,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,1}+\alpha_{2,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,1}+\alpha_{2,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,1} & \alpha_{2,1}\beta_{1,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{2,2}\beta_{2,1}\gamma_{1,2}+\alpha_{2,1}\beta_{1,2}\gamma_{2,2}+\alpha_{2,2}\beta_{2,2}\gamma_{2,2} \end{pmatrix}.$$

La propriété étudiée ici (appelée *associativité du produit matriciel*) est donc bien vérifiée.