Série 14

Exercice 1. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \to (x - z, y - x).$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer alors si possible des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ c. $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on commencera par écrire la décomposition voulue de $f(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{B}'$.

Solution: Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équations $x = y = z$. C'est donc la droite vectorielle engendrée par $(1, 1, 1)$:

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, 1, 1)).$$

L'application f est donc de rang $3 - 1 = 2$, ce qui prouve que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

a. La question posée ici demande de trouver une base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$ et une base $\mathcal{B}' = v_1', v_2'$ de $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\underbrace{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{"}[f(\mathcal{B})]_{\mathcal{B}'}\text{"}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = v_1' \\ f(v_2) = v_2' \\ f(v_3) = (0, 0). \end{cases}$$

La dernière condition demande à v_3 d'être dans le noyau de f, et donc d'être un multiple scalaire de $(1, 1, 1)$. Posons alors par exemple :

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

La famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et le troisième n'en est pas combinaison linéaire. Pour construire cette famille, on a choisi pour v_3 un élément particulier (non nul) dans le noyau de f, que l'on a ensuite complété (en allant "au plus simple") en une base de $\mathbb{R}^3$. Posons ensuite :

$$v_1' = \underbrace{(1, -1)}_{f(v_1)}, \quad v_2' = \underbrace{(0, 1)}_{f(v_2)}.$$

Définie de cette manière la famille $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ car les couples $(1, -1)$ et $(0, 1)$ ne sont pas proportionnels. Par ailleurs, les relations écrites ci-dessus sont bien vérifiées, si bien que la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est bien celle demandée.

b. La question posée ici demande de trouver une base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$ et une base de $\mathcal{B}' = v_1', v_2'$ de $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\underbrace{[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{"}[f(\mathcal{B})]_{\mathcal{B}'}\text{"}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = (0, 0, 0) \\ f(v_2) = 2v_1' \\ f(v_3) = -v_2'. \end{cases}$$

La première condition demande à v_1 d'être dans le noyau de f, et donc d'être un multiple scalaire de $(1, 1, 1)$. Posons alors par exemple :

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, 0), \quad v_3 = (0, 1, 0).$$

La famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux derniers éléments ne sont pas proportionnels et le premier n'en est pas combinaison linéaire. Pour construire cette famille, on a choisi pour v_1 un élément particulier (non nul) dans le noyau de f, que l'on a ensuite complété (en allant "au plus simple") en une base de $\mathbb{R}^3$. Posons ensuite :

$$v_1' = \underbrace{(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2})}_{\frac{1}{2} f(v_2)}, \quad v_2' = \underbrace{(0, -1)}_{-f(v_3)}.$$

Définie de cette manière la famille $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ car les couples $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ et $(0, -1)$ ne sont pas proportionnels. Par ailleurs, les relations écrites ci-dessus sont bien vérifiées, si bien que la matrice $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est bien celle demandée.

c. Il est ici impossible de trouver de telles bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En effet, le rang de $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est égal à 2 (et ce peu importe le choix de bases), et la matrice proposée ici est de rang 1.

Exercice 2. On donne les applications linéaires suivantes, dont on note A et B les matrices respectives en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to (3x + 4y, 6x + 8y) \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to (2x - 7y, 0).$$

a. Montrer que A et B sont équivalentes. Sont-elles colonne-équivalentes ? ligne-équivalentes ?

b. Déterminer deux bases de $\mathbb{R}^2$ dans lesquelles f est représentée par la matrice B, c'est-à-dire trouver $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = B.$$

c. Montrer comment produire A à partir de B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Solution:

a. On trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

A et B sont toutes deux de rang 1 : elles sont équivalentes. Pour déterminer si elles sont colonne-équivalentes, regardons les images de f et g :

$$\operatorname{Im} f : 2x = y \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} g : y = 0.$$

Comme ces deux droites vectorielles sont différentes, on peut affirmer que A et B ne sont pas colonne-équivalentes. En terme matriciel, cela signifie qu'il est impossible d'utiliser la même colonne pour décomposer A et B, ou encore qu'il est impossible de transformer A en B en n'utilisant que des opérations élémentaires sur les colonnes. Enfin, pour déterminer si A et B sont ligne-équivalentes, regardons les noyaux de f et g :

$$\operatorname{Ker} f : 3x + 4y = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} g : 2x - 7y = 0.$$

Comme ces deux droites vectorielles sont différentes, on peut affirmer que A et B ne sont pas ligne-équivalentes. Au niveau des matrices, cela signifie qu'il est impossible d'utiliser la même ligne pour décomposer A et B, ou encore qu'il est impossible de transformer A en B en n'utilisant que des opérations élémentaires sur les lignes.

b. Cherchons les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ via leurs matrices de changement de base P et Q depuis la base canonique :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = B \quad \Leftrightarrow \quad Q^{-1}AP = B.$$

Pour trouver de telles matrices, on peut essayer "d'envoyer" la décomposition colonne-ligne trouvée au (a) pour A sur celle de B. Autrement dit, on peut chercher P et Q inversibles telles que :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underbrace{Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{Q\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)}.$$

Les conditions que l'on vient d'écrire **ne caractérisent pas** des matrices P et Q de manière unique (autrement dit, il y a de nombreuses bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ solutions du problème posé). On peut essayer d'en deviner en y allant par tâtonnement, c'est-à-dire en cherchant à remplir les matrices petit-à-petit de sorte à satisfaire les conditions. Par exemple, on peut prendre :

$$\underbrace{P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{fonctionne car } 3\cdot 2+4\cdot(-1)=2 \text{ et } 3\cdot(-1)+4\cdot(-1)=-7} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{fonctionne car } 1\cdot 1+0\cdot 0=1 \text{ et } 2\cdot 1+1\cdot 0=2}$$

Autrement dit, si l'on définit :

$$\mathcal{B} = (2, -1), (-1, -1) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (1, 2), (0, 1)$$

on a bien que f est représentée par B dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Rappelons pour finir quelques méthodes pour trouver ces matrices P et Q, dans le cas où l'on n'est pas parvenu à en deviner. Une première idée est de les chercher sous une forme particulière, par exemple diagonale, triangulaire ... Par exemple pour P :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ P \text{ diagonale} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

La forme diagonale ne fonctionne pas ici pour Q, il n'y a aucune matrice diagonale inversible Q vérifiant :

$$Q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La forme triangulaire supérieure ne fonctionne pas non plus, mais la forme triangulaire inférieure fonctionne bien. On trouve par exemple :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \dots$$

Une autre méthode consiste à faire apparaitre des matrices inversibles en "complétant" les lignes et les colonnes apparaissant dans nos relations. Par exemple pour P on "complète" les lignes $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -7 \end{pmatrix}$ en des matrices inversibles (il y a beaucoup de façons de s'y prendre) :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De cette manière on demande à P de vérifier une condition supplémentaire qui n'est pas imposée par l'énoncé. L'avantage est qu'on peut maintenant trouver P via le calcul suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. En appliquant les opérations élémentaires suivantes sur B :

$$C_1 \leftarrow \tfrac{3}{2} C_1\,,\ C_2 \leftarrow -\tfrac{4}{7} C_2\,,\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

on trouve la matrice A :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Remarque : cette suite d'opérations fournit une autre façon d'identifier des matrices P et Q comme au (b). En effet, on sait qu'elle correspond au produit matriciel suivant faisant intervenir des matrices élémentaires :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{7} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \quad \Leftrightarrow \quad B = Q^{-1}AP$$

Exercice 3. On donne l'application linéaire suivante, dont on note A la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to (x + 2y, 3x + 5y).$$

On note aussi B la matrice construite en appliquant à A la suite d'opérations élémentaires suivantes :

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1\,,\ L_1 \leftrightarrow L_2\,,\ C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

a. Ecrire les matrices A et B. Montrer qu'elles sont colonne-équivalentes et ligne-équivalentes.

b. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{can}}} = B.$$

c. Produire B à partir de A par une suite d'opérations sur les lignes. *Indication : on pourra "passer" par la matrice I_2.*

Solution:

a. On trouve la matrice A directement à partir de l'expression de f, puis la matrice B en appliquant la suite d'opérations données. On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont toutes les deux inversibles (elles ont pour déterminants respectifs -1 et 1). On sait alors qu'elles sont colonne-équivalentes et ligne-équivalentes. Rappelons que cela provient du fait que les applications linéaires f et g associées via la base canonique ont même image et même noyau :

$$\underbrace{\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{et} \quad \underbrace{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g}_{\{(0,0)\}}.$$

b. En appelant P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$, on sait que :

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\text{can}}} = B \quad \Leftrightarrow \quad AP = B.$$

Comme A est inversible, on voit qu'il n'y a qu'une seule matrice P solution du problème, à savoir :

$$P = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -8 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que la base de $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$\mathcal{B} = (-21, 13)\,,\,(-8, 5)$$

est la seule base solution du problème posé. Ce n'est pas demandé explicitement, mais c'est toujours une bonne idée de vérifier notre résultat. Pour cela, notons :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2 \quad \text{ et } \quad \mathcal{B}_{\text{can}} = e_1, e_2.$$

On sait alors que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\text{can}}} = B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = 5e_1 + 2e_2 \\ f(v_2) = 2e_1 + e_2. \end{cases}$$

On peut alors contrôler les relations que l'on vient d'écrire par un calcul direct :

$$\begin{cases} f(v_1) = f(-21, 13) = (-21 + 26, -63 + 65) = (5, 2) = 5e_1 + 2e_2 \\ f(v_2) = f(-8, 5) = (-8 + 10, -24 + 25) = (2, 1) = 2e_1 + e_2. \end{cases}$$

c. Comme suggéré par l'indication, on peut chercher à obtenir B à partir de A par opérations élémentaires sur les lignes en "visant" comme étape intermédiaire la matrice I_2. Par exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{A}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

qui correspond à la suite d'opérations :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\,,\; L_2 \leftarrow -L_2\,,\; L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2\,,\; L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1\,,\; L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2.$$

Dans cette suite de matrices, on peut penser à la première partie comme le passage de A à son échelonnée réduite en ligne, et à la deuxième partie comme le passage de B à son échelonnée réduite en ligne, que l'on a "renversé". A noter qu'il n'y a pas du tout unicité de la suite d'opérations que l'on a trouvée. Par exemple, si on utilise l'échelonnement suivant de B :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{B}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors, en "renversant" ce processus on obtient maintenant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{A}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}, \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

qui correspond à la suite d'opérations élémentaires suivantes sur les lignes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\,,\; L_2 \leftarrow -L_2\,,\; L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2\,,\; L_1 \leftarrow 5L_1\,,\; L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2\,,\; L_2 \leftarrow \tfrac{1}{5}L_2\,,\; L_2 \leftarrow L_2 + \tfrac{2}{5}L_1.$$

Exercice 4. On donne les applications linéaires suivantes, dont on note A et B les matrices en bases canoniques :

$$\begin{array}{c} f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \to (x + 4y, 7x - 3y, -x + 2y) \end{array} \qquad \begin{array}{c} g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \to (x, y) \to (-2x + 3y, x - 2y, 5x + 6y) \end{array}$$

a. Montrer que les matrices A et B sont ligne-équivalentes. Sont-elles colonne-équivalentes ?

b. On note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = B.$$

Solution:

a. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est de rang 2. En effet, elle est de taille 3×2, si bien que son rang est inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, il n'y a pas de relation de proportionnalité entre ses deux colonnes, si bien que son rang est strictement supérieur à 1. En raisonnant de même, on voit que la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

est aussi de rang 2. D'après le théorème du rang, on sait donc que les noyaux de f et de g sont nuls :

$$\underbrace{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g}_{\{(0,0)\}},$$

d'où l'on déduit directement que les matrices A et B sont ligne-équivalentes. Pour savoir si elles sont colonne-équivalentes, il faut déterminer si les plans vectoriels image de f et g sont égaux. Pour cela, calculons par exemple une équation de $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ 7 & -3 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} z = 11x - 6y - 31z = 0.$$

Or cette équation n'est pas satisfaite par les triplets suivants, qui forment une base de $\operatorname{Im} g$:

$$\underbrace{g(1,0) = (-2,1,5)}_{-22-6-153=-181\neq 0} \quad \text{et} \quad \underbrace{g(0,1) = (3,-2,6)}_{33+12-186=-141\neq 0}.$$

Les plans vectoriels image de f et g sont différents : A et B ne sont pas colonne-équivalentes.

b. En appelant P la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$, on sait que :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = B \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}A = B \quad \Leftrightarrow \quad A = PB \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pour identifier une telle matrice inversible P, on peut voir A et B comme des "débuts de matrices inversibles", et donc les compléter (en leur ajoutant à chacune une colonne) de sorte à en faire des matrices inversibles. Par exemple, on peut demander à P de satisfaire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{déterminant } -6\neq 0 \text{ donc inversible}} = P \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{déterminant } 1\neq 0 \text{ donc inversible}}.$$

De cette manière on demande à P de vérifier une condition supplémentaire qui n'est pas imposée par l'énoncé. L'avantage est qu'on peut maintenant trouver P via le calcul suivant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Pour calculer l'inverse qui intervient dans l'expression ci-dessus, passons par exemple par la résolution du système linéaire général suivant (ce n'est pas la seule méthode) :

$$\begin{cases} -2x + 3y = a \\ x - 2y = b \\ 5x + 6y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = a + 2b \\ x - 2y = b \\ 5x + 6y + z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -a - 2b \\ x = b + 2y = -2a - 3b \\ z = c - 5x - 6y = 16a + 27b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2a - 3b \\ y = -a - 2b \\ z = 16a + 27b + c \end{cases}$$

On trouve donc :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 16 & 27 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice inversible P suivante est donc solution du problème posé :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 16 & 27 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 0 \\ 5 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = (-6,5,0)\,,\,(-11,12,-1)\,,\,(0,1,0)$$

est solution du problème posé. Ce n'est pas demandé explicitement, mais c'est toujours une bonne idée de vérifier notre résultat. Pour cela, notons :

$$\mathcal{B}_{\text{can}} = e_1, e_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = v_1, v_2, v_3.$$

On sait alors que :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}},\mathcal{B}} = B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(e_1) = -2v_1 + v_2 + 5v_3 \\ f(e_2) = 3v_1 - 2v_2 + 6v_3. \end{cases}$$

On peut alors contrôler les relations que l'on vient d'écrire par un calcul direct :

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 + 5v_3 = -2(-6,5,0) + (-11,12,-1) + 5(0,1,0) = (1,7,-1) = f(1,0) = f(e_1) \\ 3v_1 - 2v_2 + 6v_3 = 3(-6,5,0) - 2(-11,12,-1) + 6(0,1,0) = (4,-3,2) = f(0,1) = f(e_2). \end{cases}$$

Exercice 5. On donne, en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & \beta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A et B sont toujours colonne-équivalentes.

b. A quelle(s) condition(s) sur α et β sont-elles ligne-équivalentes ? *Indication : discuter selon que $\alpha = \beta$ ou $\alpha \neq \beta$.*

Solution:

a. Il suffit de constater que l'on passe de A à B en échangeant les deux premières colonnes, ce qui correspond par exemple à l'égalité matricielle :

$$AP = B \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Supposons dans un premier temps que $\alpha = \beta$. Dans ce cas, les deux matrices A et B sont égales :

$$A = B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

Elles sont donc a fortiori ligne-équivalentes. On supposera dorénavant que $\alpha \neq \beta$. Appelons alors :

$$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

les applications linéaires de matrices respectives A et B en base canonique. On cherche à savoir si f et g ont le même noyau. Intéressons-nous à celui de f, qui n'est autre que l'ensemble des solutions du système homogène de matrice A :

$$\begin{cases} \alpha x + \alpha y + \beta z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \beta z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha x + \alpha y + \beta z = 0 \\ (\beta - \alpha) y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha x + \beta z = 0 \\ y = 0 \ (\text{car } \alpha \neq \beta) \end{cases}$$

Comme α ou β est non nul (puisque ces deux réels sont distincts) on voit que la première équation dans le dernier système n'est pas $0x + 0z = 0$. Elle est donc indépendante de la deuxième, si bien que le noyau de f est ici la droite vectorielle :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((\beta, 0, -\alpha)).$$

Or on sait d'après (a) que f et g ont le même rang. Le noyau de g est donc aussi une droite vectorielle, et on a :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{g(\beta, 0, -\alpha)}_{(0, \beta(\beta - \alpha))} = (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 0.$$

Si $\beta \neq 0$ alors les matrices A et B ne sont donc pas ligne-équivalentes. Si par contre $\beta = 0$ alors A et B sont ligne-équivalentes. Dans ce cas on peut en effet relier A à B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la suite d'opérations :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1\,,\; L_2 \leftarrow -L_2.$$

En conclusion, on a donc :

$$A \text{ et } B \text{ ligne-équivalentes} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta \text{ ou } \beta = 0.$$

Exercice 6. Décrire le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \to (3x + 2y + z, -3x + z, -y - z).$$

Si c'est possible, déterminer alors une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée.

a. La dernière colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

b. Même condition qu'au a. et, en supplément, la dernière ligne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle.

c. Mêmes conditions qu'au b. et, en supplément, la première colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.

Solution: Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ formé des solutions du système :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ -3x + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} z = 3x \\ y = -3x \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad (x, y, z) = x(1, -3, 3).$$

C'est donc la droite vectorielle engendrée par $(1, -3, 3)$:

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((1, -3, 3)).$$

L'application f est de rang 2. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est un plan vectoriel, dont on obtient une base à chaque fois que l'on produit par f deux éléments de $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas proportionnels, comme par exemple :

$$f(1, 0, 0) = (3, -3, 0) = 3(1, -1, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 1, 0) = (2, 0, -1).$$

On voit donc que le plan vectoriel $\operatorname{Im} f$ admet $(1, -1, 0), (2, 0, -1)$ pour base et possède donc pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} z = x + y + 2z = 0.$$

a. Notons v_1, v_2, v_3 les éléments de la base $\mathcal{B}$ recherchée. La dernière colonne de $[f]_{\mathcal{B}}$ est nulle si et seulement si :

$$\underbrace{[f(v_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{3ème colonne de } [f]_{\mathcal{B}}} \quad\Leftrightarrow\quad f(v_3) = (0, 0, 0) \quad\Leftrightarrow\quad v_3 \in \operatorname{Ker} f.$$

Posons alors :

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (1, -3, 3).$$

La famille $\mathcal{B}$ définie de cette manière est bien une base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et le troisième n'en est pas combinaison linéaire. Par ailleurs, d'après la description du noyau de f obtenue ci-dessus on voit que $\mathcal{B}$ vérifie bien la condition proposée ici.

b. La question posée revient à demander à ce que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit de la forme suivante :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour certains réels α, β, γ et δ. De manière équivalente, on souhaite satisfaire des relations du type :

$$\begin{cases} f(v_1) = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ f(v_2) = \gamma v_1 + \delta v_2 \\ f(v_3) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Les deux premières relations seront vérifiées si v_1, v_2 forment une base de $\operatorname{Im} f$: en effet, dans ce cas $f(v_1)$ et $f(v_2)$ s'écriront automatiquement comme combinaison linéaire de v_1 et v_2, puisqu'ils appartiennent à $\operatorname{Im} f$. Posons alors :

$$v_1 = (1, -1, 0), \quad v_2 = (2, 0, -1), \quad v_3 = (1, -3, 3).$$

La famille $\mathcal{B}$ ainsi définie est bien base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et engendrent le plan vectoriel d'équation $x + y + 2z = 0$, sur lequel le troisième élément ne se trouve pas. Elle vérifie bien des relations du type ci-dessus et répond donc bien au problème posé, d'après l'argument donné ci-dessus. Ce n'est pas demandé, mais cherchons explicitement la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$. Pour cela, calculons la famille $f(\mathcal{B})$ et décomposons-la sur $\mathcal{B}$. On trouve :

$$\begin{cases} f(1,-1,0) = (1,-3,1) = 3(1,-1,0) - (2,0,-1) \\ f(2,0,-1) = (5,-7,1) = 7(1,-1,0) - (2,0,-1) \\ f(v_3) = (0,0,0). \end{cases}$$

si bien que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c. En reprenant les notations ci-dessus, on voit que l'on souhaite maintenant satisfaire des relations du type :

$$\begin{cases} f(v_1) = v_2 \\ f(v_2) = \gamma v_1 + \delta v_2 \\ f(v_3) = (0,0,0) \end{cases}$$

(correspondant au cas où $\alpha = 0$ et $\beta = 1$). Posons alors :

$$v_1 = (1,-1,0), \quad \underbrace{v_2 = (1,-3,1)}_{f(v_1)}, \quad v_3 = (1,-3,3).$$

La famille $\mathcal{B}$ ainsi définie est bien base de $\mathbb{R}^3$: les deux premiers éléments ne sont pas proportionnels et engendrent le plan vectoriel d'équation $x + y + 2z = 0$ (c'est-à-dire $\operatorname{Im} f$), sur lequel le troisième élément ne se trouve pas. Calculons alors la famille $f(\mathcal{B})$ et décomposons-la sur $\mathcal{B}$. On trouve :

$$\begin{cases} f(1,-1,0) = (1,-3,1) \\ f(1,-3,1) = (-2,-2,2) = -4(1,-1,0) + 2(1,-3,1) \\ f(v_3) = (0,0,0). \end{cases}$$

si bien que :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a bien la forme voulue.

Exercice 7. On donne les applications linéaires suivantes, dont on note A et B les matrices respectives en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \to (5x + 4y + z, x + 5y + 5z, -x + 2y + 3z)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y,z) \to (3x + y + 2z, x + 2y + z, -7x + 6y - 3z)$$

a. Les matrices A et B sont elles équivalentes ? colonne-équivalentes ? ligne-équivalentes ?

b. Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer une matrice qui est colonne-équivalente à A et ligne-équivalente à B.

Solution:

a. Cherchons le rang de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a visiblement pas de relation de proportionnalité entre ses colonnes prises deux-à-deux. Par conséquent, A est de rang supérieur ou égal à 2. Pour savoir si elle est de rang 2 ou de rang 3, on peut par exemple calculer son déterminant :

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -21 & -24 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -21 & -24 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit donc que A est de rang 2. Passons à l'étude du rang de B :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -7 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a visiblement pas non plus de relation de proportionnalité entre ses colonnes prises deux-à-deux. Par conséquent, B est de rang supérieur ou égal à 2. Pour savoir si elle est de rang 2 ou de rang 3, calculons aussi son déterminant :

$$\det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -7 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -3 \\ -25 & 6 & -15 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -25 & -15 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit donc que B est de rang 2. Les matrices A et B ont donc le même rang : elles sont équivalentes. En termes matriciels, il est possible de décomposer A et B en utilisant le même nombre de colonnes et de lignes, ou de relier A à B par une suite d'opérations élémentaires portant sur les colonnes et sur les lignes. Pour déterminer si A et B sont colonne-équivalentes, il faut déterminer si les plans vectoriels image de f et g sont égaux. Pour cela, calculons par exemple une équation de $\operatorname{Im} f$:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & x \\ 1 & 5 & y \\ -1 & 2 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} z = \underbrace{7x - 14y + 21z}_{7(x-2y+3z)} = 0.$$

Or cette équation n'est pas satisfaite par les triplets suivants, qui appartiennent tous à $\operatorname{Im} g$:

$$\underbrace{g(1,0,0) = (3,1,-7)}_{3-2-21=-20\neq 0}, \quad \underbrace{g(0,1,0) = (1,2,6)}_{1-4+18=15\neq 0} \quad \text{et} \quad \underbrace{g(0,0,1) = (2,1,-3)}_{2-2-9=-9\neq 0}.$$

Les plans vectoriels image de f et g sont différents : A et B ne sont pas colonne-équivalentes. En termes matriciels, il est impossible de décomposer A et B en utilisant les mêmes colonnes, ou de relier A à B par une suite d'opérations élémentaires portant uniquement sur les colonnes. Passons à l'étude de la ligne-équivalence de A et B. Il faut cette-fois ci déterminer si les noyaux de f et g (qui sont des droites vectorielles) sont égaux. Pour cela, cherchons par exemple celui de f, en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 4y + z = 0 \\ x + 5y + 5z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21y - 24z = 0 \\ x + 5y + 5z = 0 \\ 7y + 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7}z \\ y = -\frac{8}{7}z \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = \tfrac{z}{7}(5,-8,7).$$

Il n'y a alors plus qu'à constater que :

$$g(5,-8,7) = (21,-4,-104) \neq (0,0,0)$$

pour affirmer que les noyaux de f et g sont distincts : A et B ne sont pas ligne-équivalentes. En termes matriciels, il est impossible de décomposer A et B en utilisant les mêmes lignes, ou de relier A à B par une suite d'opérations élémentaires portant uniquement sur les lignes.

b. Il y a de nombreuses matrices solutions du problème posé. On peut prendre par exemple :

$$C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 13 & 14 \\ 8 & 11 & 7 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, de cette manière on définit une matrice de rang 2 : elle admet une décomposition colonne-ligne de longueur 2 (et est donc de rang inférieur ou égal à 2) et ses colonnes ne sont visiblement pas deux-à-deux proportionnelles. La décomposition de C écrite ci-dessus est minimale, si bien que, si l'on appelle $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice C en base canonique, on a :

$$\underbrace{\operatorname{Im} h = \operatorname{Im} f}_{\operatorname{Vect}((5,1,-1),(4,5,2))} \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} h = \operatorname{Ker} g : \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

On en déduit bien que C est colonne-équivalente à A et ligne-équivalente à B.

Exercice 8. Est-il vrai ou faux de dire que, pour tout choix de matrices colonne-équivalentes $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ on a :

a. A et $A+B$ sont colonne-équivalentes ? b. BA et B^2 sont colonne-équivalentes ? c. A^2 et B^2 sont colonne-équivalentes ?

Si vous pensez que c'est vrai expliquez pourquoi. Si vous pensez que c'est faux, donnez un contre-exemple.

Solution:

a. C'est faux. Prenons par exemple :

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} \quad \text{et} \quad \underbrace{B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{-I_2}.$$

Les matrices A et B sont inversibles. On sait donc qu'elles sont colonne-équivalentes (et aussi ligne-équivalentes). On peut par exemple écrire :

$$B = AP \quad \text{avec} \quad P = A^{-1}B = -I_2.$$

Cependant, $A + B$ est la matrice nulle, et n'est donc pas équivalente à A (elles n'ont pas le même rang) : les matrices A et $A + B$ ne sont donc pas colonne-équivalentes.

b. C'est vrai. En effet, comme A et B sont colonne-équivalentes, il existe une matrice inversible P telle que :

$$B = AP.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par B à gauche. On obtient :

$$B^2 = B(AP) = (BA)P,$$

ce qui montre bien que B^2 et BA sont colonne-équivalentes. En fait, une suite d'opération élémentaires sur les colonnes qui transforme A en B transforme aussi BA en B^2.

c. C'est faux. Prenons par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont colonne-équivalentes. Elles peuvent en effet être décomposées en utilisant la même colonne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi observer que B est obtenue à partir de A par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$. Calculons alors les carrés de A et B :

$$\underbrace{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A}_{A \text{ est une matrice de projection}} \quad \text{et} \quad \underbrace{B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B \text{ est nilpotente}}.$$

Les matrices A^2 et B^2 n'ont pas le même rang : elles ne sont pas équivalentes, et a fortiori pas colonne-équivalentes.