Série 13

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans chacun des cas suivants, calculer A^n en fonction de n, où A est la matrice proposée.

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution:

a. Comme A est diagonale, on a vu au cours que la matrice A^n est obtenue en élevant chacun des coefficients diagonaux à la puissance n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

b. D'après le résultat vu au cours, on a ici :

$$A^n = \begin{pmatrix} 4^n & n4^{n-1} \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & n \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Au passage, expliquons comment retrouver ce résultat à l'aide de la formule du binôme de Newton. On écrit la matrice proposée sous la forme :

$$A = 4I_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

puis on élève à la puissance n (la formule du binôme s'applique bien ici car les matrices $4I_2$ et N commutent) :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{n-k} N^k.$$

La matrice N étant de carré nul, seuls les indices $k = 0$ et $k = 1$ apportent une véritable contribution à la somme. On trouve alors :

$$A^n = 4^n I_2 + n4^{n-1} N = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 4 & n \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. La matrice A proposée ici ne possède aucune valeur propre réelle. Elle est en fait ici déjà sous forme réduite. Ecrivons-la alors sous forme "polaire" :

$$A = \sqrt{2} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}}_{R_{-\frac{\pi}{4}}}$$

c'est-à-dire comme multiple scalaire d'une matrice de rotation. On trouve ensuite :

$$A^n = (\sqrt{2})^n \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\frac{n\pi}{4}) & \sin(\frac{n\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{n\pi}{4}) & \cos(\frac{n\pi}{4}) \end{pmatrix}}_{R_{-\frac{n\pi}{4}}}.$$

On a par exemple :

$$A^4 = -4I_2,\ A^8 = 16I_2 \ldots$$

Exercice 2. On donne deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - 3v_n \\ v_{n+1} = 3u_n - v_n. \end{cases}$$

Calculer les valeurs exactes de u_n et v_n en fonction de n.

Solution: On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

ainsi que l'application linéaire f ayant A pour matrice en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (5x-3y, 3x-y).$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a donc la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

qui entraine par récurrence que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ fois}} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant à réduire f (ou A). Pour cela, on commence par calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

Par conséquent f possède une unique valeur propre, à savoir 2. Comme l'application f n'est pas égale à $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, on sait qu'elle admet pour forme réduite la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une base $\mathcal{B} = u, v$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(u) = 2u \\ f(v) = u + 2v. \end{cases}$$

On sait par ailleurs que dans ce cas on peut prendre pour v n'importe quel vecteur "non propre" de f. Posons par exemple :

$$v = (1,0).$$

Ce n'est pas un vecteur propre de f car :

$$f(v) = f(1,0) = (5,3)$$

n'est pas proportionnel à v. On déduit alors u de la deuxième égalité dans le système écrit ci-dessus :

$$u = f(v) - 2v = (5,3) - 2(1,0) = (3,3).$$

Ainsi définie, la famille $\mathcal{B} = u, v$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ et les relations ci-dessus sont bien vérifiées :

$$\begin{cases} f(u) = f(3,3) = (6,6) = 2(3,3) = 2u \\ f(v) = f(1,0) = (5,3) = (3,3) + 2(1,0) = u + 2v. \end{cases}$$

Au niveau matriciel, on vient d'établir que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$. On en déduit :

$$A^n = \left(P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}\right)^n = P \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 3n+2 & -3n \\ 3n & 2-3n \end{pmatrix},$$

puis :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3n+2)2^{n-1} \\ 3n2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a donc établi les expressions suivantes pour u_n et v_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (3n+2)2^{n-1} \quad \text{ et } \quad v_n = 3n2^{n-1}.$$

Exercice 3. On donne deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = (\sqrt{3}-2)u_n + \sqrt{\frac{3}{2}}v_n. \end{cases}$$

a. Calculer la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

b. Montrer que les suites données sont périodiques.

Solution:

a. Observons par exemple que :

$$\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{4}.$$

On a alors, d'après les formules vues au cours de trigonométrie :

$$\cos(\tfrac{\pi}{12}) = \cos(\tfrac{\pi}{3})\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{3})\sin(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Remarque : il y a beaucoup de manières de procéder. On pourrait par exemple observer aussi que $\frac{\pi}{12}$ est la moitié de $\frac{\pi}{6}$ et utiliser les formules de bissection.

b. Notons A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (\tfrac{1}{\sqrt{2}}x + \tfrac{1}{2}y, (\sqrt{3}-2)x + \sqrt{\tfrac{3}{2}}y).$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on a donc la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

qui entraine par récurrence que :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ fois}} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant à réduire f (ou A). Comme :

$$\operatorname{tr} A = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = 2\cos(\frac{\pi}{12}) \quad \text{et} \quad \det A = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-2) = 1,$$

on voit que f a pour polynôme caractéristique :

$$X^2 - 2\cos(\tfrac{\pi}{12})X + 1 = (X - \cos(\tfrac{\pi}{12}))^2 + (\sin(\tfrac{\pi}{12}))^2.$$

L'application linéaire f admet donc pour forme réduite la matrice de rotation :

$$R_{\frac{\pi}{12}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & -\sin\frac{\pi}{12} \\ \sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} \end{pmatrix}.$$

Au niveau matriciel, il existe une matrice 2×2 inversible P telle que :

$$P^{-1}AP = R_{\frac{\pi}{12}} \quad \text{ou encore} \quad A = PR_{\frac{\pi}{12}}P^{-1}.$$

Par conséquent, on voit par exemple que :

$$A^{24} = (PR_{\frac{\pi}{12}}P^{-1})^{24} = PR_{\frac{\pi}{12}}^{24}P^{-1} = P\underbrace{R_{2\pi}}_{I_2}P^{-1} = I_2.$$

On trouve alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+24} \\ v_{n+24} \end{pmatrix} = A^{n+24}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^{24}A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+24} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+24} = v_n.$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bien périodiques (la période de chacune de ces suites étant un diviseur de 24), et ce indépendamment de leurs valeurs initiales.

Remarque : pour résoudre cet exercice, il n'a pas été nécessaire d'effectuer concrètement la réduction de f. Seule la connaissance de la forme réduite a été utile.

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice $B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$:

a. $A = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 34 & -15 \\ 50 & -21 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} 7 & -25 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$.

Indication : pour b. et c. on pourra commencer par réduire A.

Solution:

a. Si l'on pose :

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

on obtient ici directement :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} = A.$$

b. Introduisons l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (34x - 15y, 50x - 21y)$$

de matrice A en base canonique et cherchons à réduire f (ou A). Commençons pour cela par calculer son polynôme caractéristique :

$$\begin{cases} \operatorname{tr} A = 34 - 21 = 13 \\ \det A = 34 \cdot (-21) + 15 \cdot 50 = -714 + 750 = 36 \end{cases} \Rightarrow \quad \chi_f(X) = X^2 - 13X + 36 = (X - 4)(X - 9).$$

Par conséquent f possède deux valeurs propres, à savoir 4 et 9. On peut donc déjà affirmer que f est diagonalisable. Pour déterminer une base propre, commençons par calculer les matrices :

$$A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 30 & -15 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 9I_2 = \begin{pmatrix} 25 & -15 \\ 50 & -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : 2x = y}_{\mathrm{Vect}((1,2))} \quad \text{et} \quad \underbrace{\operatorname{Ker}(f - 9\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : 5x = 3y}_{\mathrm{Vect}((3,5))}.$$

On voit donc que la famille suivante :

$$\mathcal{B} = (1, 2), (3, 5)$$

est une base de $\mathbb{R}^2$ qui est formée de vecteurs propres pour f : c'est une base propre pour f. Par conséquent, on a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$. Posons alors :

$$B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

On voit alors que :

$$B^2 = (P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1})^2 = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} = A.$$

On a donc bien trouvé une racine carrée de A.

c. Introduisons l'application linéaire f ayant A pour matrice en base canonique :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (7x - 25y, 2x - 7y)$$

et cherchons maintenant à réduire f (ou A). Pour cela, on commence par calculer son polynôme caractéristique :

$$\begin{cases} \operatorname{tr} A = 7 - 7 = 0 \\ \det A = -49 + 50 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \chi_f(X) = X^2 + 1.$$

L'application f ne possède donc aucune valeur propre réelle. La forme du polynôme caractéristique que l'on a obtenue montre que f admet pour forme réduite la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une base $\mathcal{B} = u, v$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(u) = v \\ f(v) = -u. \end{cases}$$

On sait par ailleurs que dans ce cas on peut prendre pour u n'importe quel élément non nul de $\mathbb{R}^2$, comme par exemple $(1,0)$. On déduit alors v de la première égalité ci-dessus :

$$v = f(u) = f(1,0) = (7,2).$$

Ainsi définie, la famille $\mathcal{B} = u, v$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$ et les relations ci-dessus sont bien vérifiées :

$$\begin{cases} f(u) = f(1,0) = (7,2) = v \\ f(v) = f(7,2) = (-1,0) = -u. \end{cases}$$

Au niveau matriciel, on vient d'établir que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$. Observons à présent que la forme réduite de A que l'on a trouvée n'est autre que la matrice de rotation $R_{\frac{\pi}{2}}$. Pour extraire une racine carrée de cette forme réduite, on peut donc naturellement penser à la matrice de rotation $R_{\frac{\pi}{4}}$ (le processus géométrique de tourner d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ est le même que celui de tourner deux fois consécutivement d'un angle de $\frac{\pi}{4}$). On est donc amené à poser :

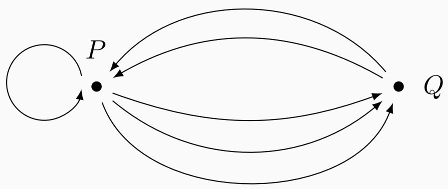
$$B = P \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}}_{R_{\frac{\pi}{4}}} P^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 8 & -25 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

On voit alors que :

$$B^2 = (PR_{\frac{\pi}{4}}P^{-1})^2 = PR_{\frac{\pi}{4}}^2 P^{-1} = PR_{\frac{\pi}{2}}P^{-1} = A.$$

On a donc bien trouvé une racine carrée de A.

Exercice 5. La figure ci-dessous représente deux points P et Q reliés entre eux par des chemins à sens unique, dont le nombre est donné par les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$:



a. Compter le nombre de chemins à 2 étapes allant de P à P, de P à Q, de Q à P et de Q à Q.

b. Calculer la matrice A^2 et comparer avec les nombres trouvés en a. Que constatez-vous ?

c. En généralisant, interpréter, pour tout $n \geqslant 1$, les coefficients de la matrice A^n comme nombres de chemins à n étapes dans le circuit, puis montrer votre résultat. *Indication : on pourra raisonner par récurrence.*

d. Calculer, en fonction de l'entier n, le nombre de chemins à n étapes joignant P à Q.

Solution:

a. Pour se rendre de P à P en 2 étapes il y a deux options : soit on emprunte deux fois successivement le chemin qui boucle sur P, soit on se rend au point Q en utilisant l'un des 3 chemins possibles, puis l'on revient à P en empruntant l'un des 2 chemins possibles. Au total, on dénombre donc :

$$1 \times 1 + 3 \times 2 = 7$$

possibilités. Pour se rendre de P à Q en 2 étapes, on doit d'abord emprunter le chemin qui boucle sur P, puis l'un des 3 chemins qui vont de P à Q (et ce car il n'y a pas de chemin qui boucle sur Q). On trouve donc ici :

$$1 \times 3 = 3$$

possibilités. En raisonnant de la même façon, on constate qu'il y a 2 manières de passer de Q à P en 2 étapes et 6 manières de relier Q à lui-même en 2 étapes.

b. Un calcul direct montre que :

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}.$$

On constate alors que les coefficients dans cette matrice sont exctement ceux que l'on a trouvé en a.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, introduisons les nombres de chemins à n étapes dans le circuit, selon le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \gamma_n & \delta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } P \text{ à } P & \text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } P \text{ à } Q\\ \text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } Q \text{ à } P & \text{nombre de chemins à } n \text{ étapes allant de } Q \text{ à } Q\end{pmatrix}$$

On a par exemple :

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} = A \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix} = A^2.$$

En se basant sur ces premières valeurs, on conjecture que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \gamma_n & \delta_n\end{pmatrix} = A^n.$$

Montrons à présent ce résultat en raisonnant par récurrence, l'initialisation ayant déjà été faite. Supposons maintenant que cette égalité a lieu pour n et cherchons à l'établir pour $n+1$. Intéressons-nous alors par exemple au coefficient α_{n+1}. Observons que pour relier P à lui-même en $n+1$ étapes il y a deux cas : soit on emprunte l'un des α_n chemins à n étapes qui partent et arrivent en P et on ajoute comme $n+1$-ème étape le chemin qui boucle sur P (une seule possibilité), soit on se rend au point Q en n étapes (il y a donc β_n possibilités) et on termine en empruntant l'un des 2 chemins qui reviennent sur P depuis Q. En définitive, on a donc la relation :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2\beta_n.$$

Passons à l'étude du coefficient β_{n+1}. Cette fois-ci, comme il n'y aucun chemin qui boucle sur Q, on voit que pour rejoindre P à Q en $n+1$ étapes il faut emprunter l'un des α_n chemins qui conduisent de P à lui-même en n étapes, puis finir en empruntant l'un des 3 chemins allant de P à Q. Ceci montre la relation :

$$\beta_{n+1} = 3\alpha_n.$$

En raisonnant de même, on prouve aussi les deux relations :

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + 2\delta_n \quad \text{et} \quad \delta_{n+1} = 3\gamma_n.$$

Au niveau matriciel, on obtient alors :

$$\begin{pmatrix}\alpha_{n+1} & \beta_{n+1}\\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_n + 2\beta_n & 3\alpha_n\\ \gamma_n + 2\delta_n & 3\gamma_n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\alpha_n & \beta_n\\ \gamma_n & \delta_n\end{pmatrix}}_{A^n \text{ par hypothèse}} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}}_{A} = A^{n+1}.$$

Ceci achève de prouver par récurrence la propriété voulue.

d. D'après le c., le nombre recherché ici est donc le coefficient en haut à droite dans la matrice A^n. Pour trouver ce coefficient, introduisons l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (x + 3y, 2x)$$

de matrice A en base canonique et cherhcons à réduire f (ou A). Commençons pour cela par calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - X - 6 = (X+2)(X-3).$$

Par conséquent f possède deux valeurs propres, à savoir -2 et 3. On peut donc déjà affirmer que f est diagonalisable. Pour déterminer une base propre, commençons par calculer les matrices :

$$A + 2I_2 = \begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 3I_2 = \begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\underbrace{\operatorname{Ker}(f + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : x + y = 0}_{\mathrm{Vect}((1,-1))} \quad \text{et} \quad \underbrace{\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : 2x = 3y}_{\mathrm{Vect}((3,2))}.$$

On voit donc que la famille suivante :

$$\mathcal{B} = (1, -1), (3, 2)$$

est une base de $\mathbb{R}^2$ qui est formée de vecteurs propres pour f : c'est une base propre pour f. Par conséquent, on a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$. On trouve maintenant :

$$A^n = (P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}P^{-1})^n = P\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^n P^{-1} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2(-2)^n & -3(-2)^n\\ 3^n & 3^n\end{pmatrix} = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3^{n+1}+2(-2)^n & 3^{n+1}-3(-2)^n\\ 2(3^n-(-2)^n) & 2\cdot 3^n+3(-2)^n\end{pmatrix}.$$

Le nombre de chemins à n étapes joignant le sommet de gauche à celui de droite est donc :

$$\tfrac{1}{5}(3^{n+1}-3(-2)^n) = \tfrac{3}{5}(3^n-(-2)^n).$$

Voilà alors les premières valeurs de la suite obtenue :

$$3, 3, 21, 39, 165, 399, 1389\ldots$$

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les données initiales $u_0 = \alpha$, $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

a. Dans le cas où $\alpha = 0$, calculer la valeur exacte de u_n en fonction de n.

b. Déterminer la valeur de α sachant que la suite $(\frac{u_n}{3^n})_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite finie, et calculer cette limite.

Solution: Avant de répondre aux deux questions posées, rappelons la stratégie vue au cours pour manier ce genre de suites. On considére l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (7x - 12y, x)$$

et sa matrice :

$$A = \begin{pmatrix}7 & -12\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

en base canonique. On a alors :

$$\begin{pmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7u_{n+1} - 12u_n\\ u_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$$

si bien que, par récurrence :

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix} = \underbrace{A\cdots A}_{n\text{ fois}}\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}.$$

a. Dans le cas où $\alpha = 0$, la discussion qui précède montre que u_n est le coefficient en bas à gauche dans la matrice A^n. Pour trouver ce coefficient, on va chercher à réduire f (ou A). Commençons par calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 7X + 12 = (X-3)(X-4).$$

Par conséquent f possède deux valeurs propres, à savoir 3 et 4. On peut donc déjà affirmer que f est diagonalisable. Pour déterminer une base propre, commençons par calculer les matrices :

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix}4 & -12\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 4I_2 = \begin{pmatrix}3 & -12\\ 1 & -4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4\end{pmatrix}.$$

On en déduit alors :

$$\underbrace{\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : x = 3y}_{\mathrm{Vect}((3,1))} \quad \text{et} \quad \underbrace{\mathrm{Ker}(f - 4\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : x = 4y}_{\mathrm{Vect}((4,1))}.$$

On voit donc que la famille suivante :

$$\mathcal{B} = (3,1), (4,1)$$

est une base de $\mathbb{R}^2$ qui est formée de vecteurs propres pour f : c'est une base propre pour f. Par conséquent, on a :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, \text{ où } P = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

est la matrice de changement de base de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à $\mathcal{B}$. On trouve maintenant :

$$A^n = (P\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}P^{-1})^n = P\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4^{n+1}-3^{n+1} & 4\cdot 3^{n+1}-3\cdot 4^{n+1}\\ 4^n-3^n & 4\cdot 3^n - 3\cdot 4^n\end{pmatrix}.$$

On a déjà dit que u_n se trouve en bas à gauche dans cette matrice :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 4^n - 3^n.$$

b. Revenant au cas général, on peut utiliser la formule pour A^n trouvée au a. et la relation :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

obtenue ci-dessus pour trouver l'expression :

$$u_n = 4^n - 3^n + \alpha(4 \cdot 3^n - 3 \cdot 4^n) = (4\alpha - 1)3^n + (1 - 3\alpha)4^n.$$

On en déduit alors :

$$\frac{u_n}{3^n} = (4\alpha - 1) + (1 - 3\alpha)(\tfrac{4}{3})^n.$$

Pour que cette suite possède une limite finie, il faut donc que α soit égal à $\frac{1}{3}$, auquel cas la limite recherchée est $\frac{1}{3}$.

Exercice 7. On donne une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité suivante :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

Ce résultat porte le nom de *théorème de Cayley-Hamilton*.

Solution: Notons :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$\det(A) = \alpha\delta - \beta\gamma, \quad \mathrm{tr}(A) = \alpha + \delta \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & (\alpha + \delta)\beta \\ (\alpha + \delta)\gamma & \delta^2 + \beta\gamma \end{pmatrix}.$$

si bien que :

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma - (\alpha + \delta)\alpha + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 1 & (\alpha + \delta)\beta - (\alpha + \delta)\beta + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 0 \\ (\alpha + \delta)\gamma - (\alpha + \delta)\gamma + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 0 & (\delta^2 + \beta\gamma) - (\alpha + \delta)\delta + (\alpha\delta - \beta\gamma) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$