Série 10

Exercice 1. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \frac{1}{\sqrt{10}}(3x + y, -x + 3y).$$

a. Calculer $f(1, 0)$ et placer ce point dans le plan muni d'un repère orthonormé direct.

b. Déterminer la nature géométrique de f.

Solution:

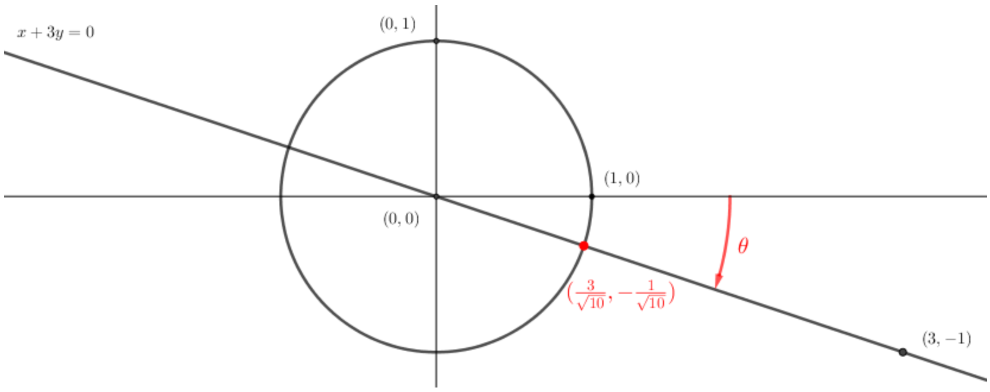
a. On trouve :

$$f(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(3, -1) = (\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}).$$

Le point $f(1, 0)$ est donc sur la droite vectorielle d'équation $x + 3y = 0$. Il est aussi sur le cercle trigonométrique, car :

$$(\frac{3}{\sqrt{10}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{10}})^2 = \frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1.$$

Pour placer $f(1, 0)$, on peut partir par exemple de $(3, -1)$, qui lui est proportionnel, et le "ramener" sur le cercle trigonométrique, comme sur le dessin ci-dessous :



L'angle orienté θ apparaissant sur la figure est tel que :

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ et } \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

En valeur exacte, il vaut :

$$-\arccos(\frac{3}{\sqrt{10}}) = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{10}}).$$

En valeur approchée, on peut voir que cet angle vaut environ $-18,4°$.

b. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On voit donc qu'elle est égale à R_θ, où θ a été identifié au a. Par conséquent, f est la rotation d'angle θ.

Exercice 2. On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to \frac{1}{13}(-5x + 12y, 12x + 5y).$$

a. Ecrire la matrice de f en base canonique. Quelle est la nature géométrique de f ?

b. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, faire apparaitre un point (x, y) ainsi que son image $f(x, y)$ par f.

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Au vu de l'égalité :

$$(-\tfrac{5}{13})^2 + (\tfrac{12}{13})^2 = \tfrac{25}{169} + \tfrac{144}{169} = 1$$

on peut affirmer que :

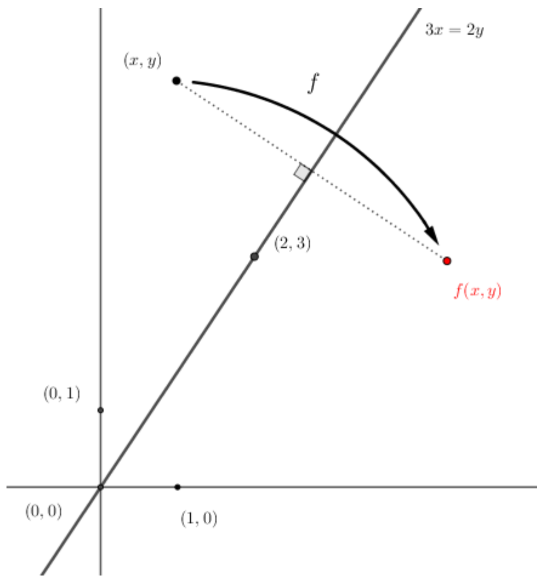
$$A = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{5}{13} \\ \sin(\theta) = \frac{12}{13}. \end{cases}$$

Par conséquent, l'application linéaire f est une réflexion.

b. Afin de répondre à cette question, il faut identifier l'axe de la réflexion f. On peut l'obtenir par exemple en recherchant les points fixes de f :

$$f(x,y) = (x,y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y = x \\ \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y = y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{12}{13}y = \frac{18}{13}x \\ \frac{12}{13}x = \frac{8}{13}y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2y.$$

On obtient alors le dessin suivant :



Exercice 3. Déterminer l'expression de la réflexion :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dont l'axe est la droite vectorielle d'équation $5x + 4y = 0$.

Solution: Nous allons donner deux approches pour résoudre cette question. Dans la première approche, partons de l'expression générale suivante pour une réflexion :

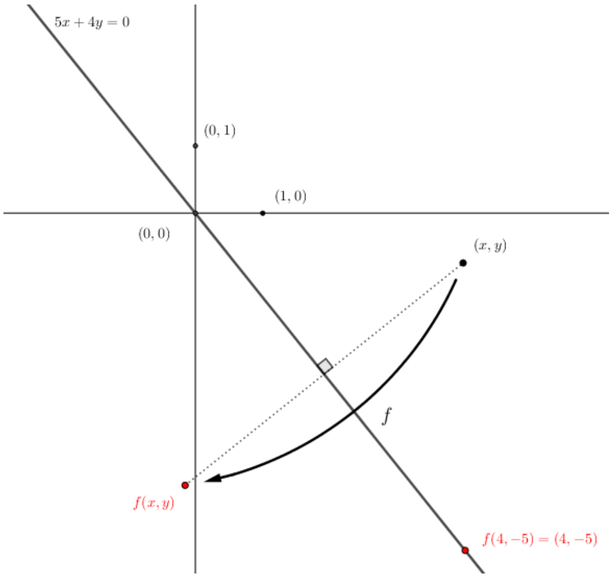
$$f(x,y) = (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y, \sin(\theta)x - \cos(\theta)y)$$

pour un certain réel θ. Comme $(4,-5)$ se trouve sur l'axe il est fixé par f. On obtient donc :

$$f(4,-5) = (4,-5) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\cos(\theta) - 5\sin(\theta) = 4 \\ 4\sin(\theta) + 5\cos(\theta) = -5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4\cos(\theta) - 5\sin(\theta) = 4 \\ 41\cos(\theta) = -9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{9}{41} \\ \sin(\theta) = -\frac{40}{41}. \end{cases}$$

En conclusion, on a trouvé l'expression suivante pour f :

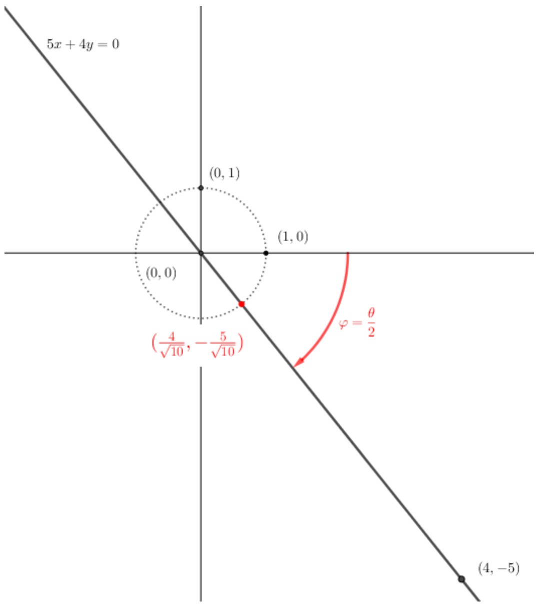
$$f(x,y) = \tfrac{1}{41}(-9x - 40y, -40x + 9y).$$



Dans la seconde approche, introduisons l'angle d'inclinaison φ de l'axe $5x+4y=0$. On sait alors que f a pour matrice :

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \text{ où } \theta = 2\varphi.$$

On trouve φ en choisissant un point sur l'axe, comme par exemple $(4,-5)$ et en le "ramenant" sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire en le multipliant par l'inverse de sa distance à l'origine, qui vaut $\sqrt{41}$ dans cet exemple.



On obtient de cette façon :

$$(\cos\varphi, \sin\varphi) = (\tfrac{4}{\sqrt{41}}, -\tfrac{5}{\sqrt{41}}).$$

Les formules de trigonométrie pour la duplication de l'angle fournissent alors :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = 2\cos^2\varphi - 1 = -\frac{9}{41} \\ \sin(\theta) = 2\cos\varphi\sin\varphi = -\frac{40}{41}. \end{cases}$$

ce qui nous donne la même formule que ci-dessus pour f.

Exercice 4. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie comme la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Donner l'expression de $f(x,y)$ en fonction de x et y.

b. En discutant selon la valeur de l'entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer l'application linéaire :

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Solution:

a. La matrice de f en base canonique est :

$$A = R_{\frac{2\pi}{3}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

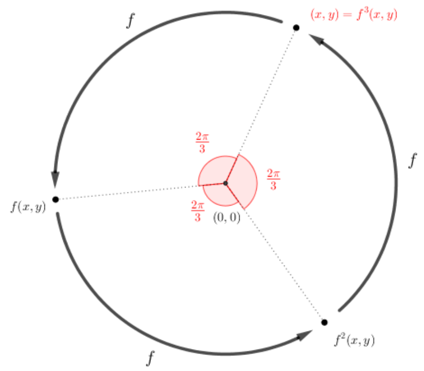
On trouve donc l'expression suivante pour f :

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}(-x-\sqrt{3}y, \sqrt{3}x - y).$$

b. Géométriquement, on sait d'après le a. qu'appliquer f à (x,y) revient à le faire tourner de l'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $(0,0)$ (pourvu que l'on visualise $\mathbb{R}^2$ via un repère orthonormé direct du plan). Il est alors clair qu'appliquer f trois fois nous fait revenir au point de départ, puisque :

$$3 \times \tfrac{2\pi}{3} = 2\pi$$

correspond à un tour complet.



On en déduit déjà que si n est un multiple de 3, c'est-à-dire si n est du type $3k$ alors :

$$f^n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (x,y).$$

Si n est du type $3k+1$ on en déduit alors :

$$f^n = f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \tfrac{1}{2}(-x-\sqrt{3}y, \sqrt{3}x - y).$$

Enfin, si n est du type $3k+2$, alors :

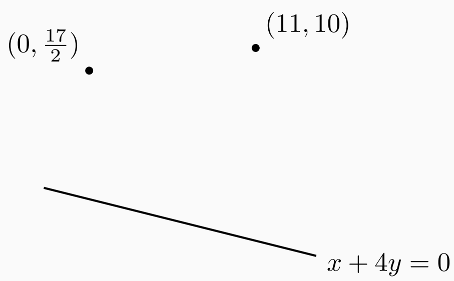
$$f^n = f^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to \tfrac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y, -\sqrt{3}x - y)$$

est la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$, qui a pour matrice :

$$R^2_{\frac{2\pi}{3}} = R_{\frac{4\pi}{3}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

en base canonique.

Exercice 5. On munit le plan d'un repère orthonormé direct. Un joueur de billard souhaite taper une boule se trouvant en $(11,10)$ pour atteindre une autre boule située en $(0, \frac{17}{2})$, après un rebond sur la droite d'équation $x + 4y = 0$:



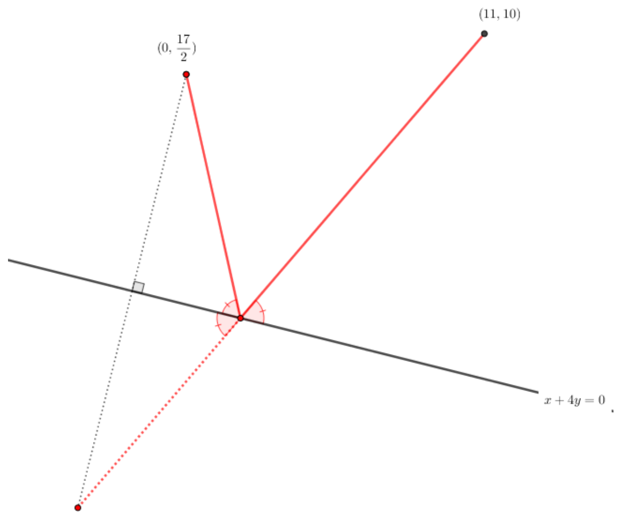
a. Reproduire le dessin ci-dessus sur une feuille puis tracer la trajectoire solution du problème.

b. Déterminer l'expression de la réflexion f d'axe $x + 4y = 0$.

c. Identifier le point de rebond.

Solution:

a. On sait que pour accomplir son but, le joueur doit viser le symétrique (orthogonal) du point d'arrivée par rapport à la droite où le rebond va avoir lieu. On obtient le tracé suivant :



b. Du fait que f est une réflexion on sait qu'elle a une expression du type :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\to(\cos(\theta)x+\sin(\theta)y,\sin(\theta)x-\cos(\theta)y)$$

pour un certain réel θ. Comme $(4,-1)$ se trouve sur l'axe il est fixé par f. On obtient :

$$f(4,-1)=(4,-1)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}4\cos(\theta)-\sin(\theta)=4\\4\sin(\theta)+\cos(\theta)=-1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}4\cos(\theta)-\sin(\theta)=4\\17\cos(\theta)=15\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{15}{17}\\\sin(\theta)=-\frac{8}{17}.\end{cases}$$

En conclusion, on a trouvé l'expression suivante pour f :

$$f(x,y)=\tfrac{1}{17}(15x-8y,-8x-15y).$$

c. D'après le b., on trouve :

$$f(0,\tfrac{17}{2})=(-4,-\tfrac{15}{2}).$$

Le point de rebond se situe sur le segment entre $(11,10)$ et $(-4,-\frac{15}{2})$. Il est donc du type :

$$(1-t)(11,10)+t(-4,-\tfrac{15}{2})=(11,10)+t(-15,-\tfrac{35}{2})=(11-15t,10-\tfrac{35}{2}t)$$

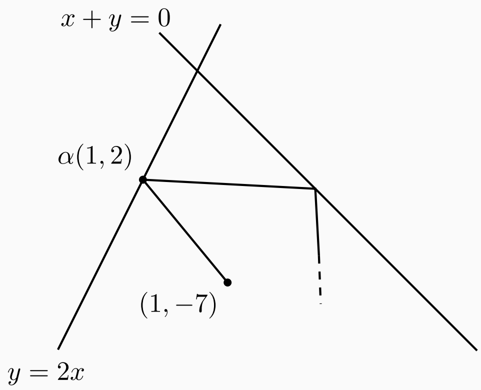
pour un certain réel t entre 0 et 1. Par ailleurs, il est aussi sur la droite d'équation $x+4y=0$, si bien que :

$$11-15t+4(10-\tfrac{35}{2}t)=0\quad\Leftrightarrow\quad 51-85t=0\quad\Leftrightarrow\quad t=\tfrac{3}{5}.$$

Il s'agit donc de :

$$(11,10)+\tfrac{3}{5}(-15,-\tfrac{35}{2})=(11,10)+(-9,-\tfrac{21}{2})=(2,-\tfrac{1}{2}).$$

Exercice 6. On munit le plan d'un repère orthonormé direct. En tapant une boule située en $(1,-7)$, un joueur de billard la fait rebondir successivement sur la droite d'équation $y=2x$ puis sur celle d'équation $x+y=0$:



a. Déterminer l'expression de la réflexion f d'axe $y=2x$ et celle de la réflexion g d'axe $x+y=0$.
b. Trouver la valeur de α pour que le second rebond s'effectue en $(3,-3)$.
c. Pour quelle valeur de α la boule repasse-t-elle par son point de départ après le deuxième rebond ?

Solution:

a. Du fait que f est une réflexion on sait qu'elle a une expression du type :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (\cos(\theta)x + \sin(\theta)y, \sin(\theta)x - \cos(\theta)y)$$

pour un certain réel θ. Comme $(1,2)$ se trouve sur l'axe il est fixé par f. On obtient alors :

$$f(1,2) = (1,2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(\theta) + 2\sin(\theta) = 1 \\ \sin(\theta) - 2\cos(\theta) = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5\cos(\theta) = -3 \\ \sin(\theta) - 2\cos(\theta) = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos(\theta) = -\frac{3}{5} \\ \sin(\theta) = \frac{4}{5}. \end{cases}$$

En conclusion, on a trouvé l'expression suivante pour f :

$$f(x,y) = \tfrac{1}{5}(-3x+4y, 4x+3y).$$

Utilisons une autre méthode pour déterminer l'expression de la réflexion g d'axe $x+y=0$. Comme cet axe est incliné de l'angle $\varphi = -45°$ par rapport à l'horizontale on sait que la matrice de g en base canonique est :

$$\begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & \sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & -\cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En conclusion, on a trouvé l'expression suivante pour g :

$$g(x,y) = (-y,-x).$$

b. Pour que le deuxième rebond ait lieu en $(3,-3)$, on sait que le joueur doit faire partir la boule en direction de :

$$f(3,-3) = (-\tfrac{21}{5}, \tfrac{3}{5}).$$

Le premier point de rebond se situe sur le segment entre $(1,-7)$ et $(-\frac{21}{5}, \frac{3}{5})$. Il est donc du type :

$$(1-t)(1,-7) + t(-\tfrac{21}{5}, \tfrac{3}{5}) = (1,-7) + t(-\tfrac{26}{5}, \tfrac{38}{5}) = (1 - \tfrac{26}{5}t, -7 + \tfrac{38}{5}t)$$

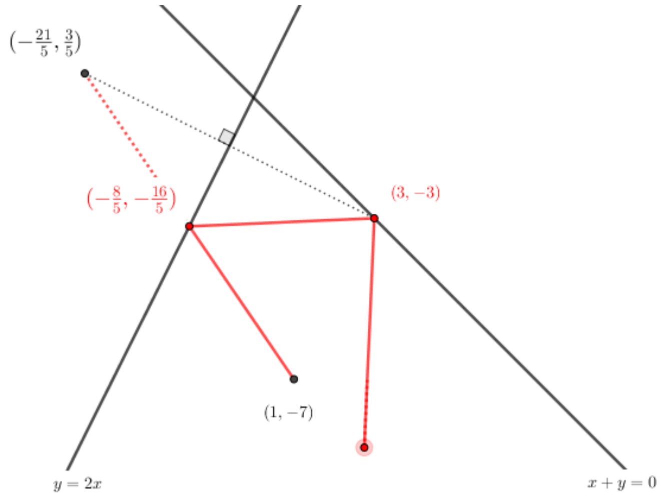
pour un certain réel t entre 0 et 1. Par ailleurs, il est aussi sur la droite d'équation $y=2x$, si bien que :

$$-7 + \tfrac{38}{5}t = 2(1 - \tfrac{26}{5}t) \quad \Leftrightarrow \quad 18t = 9 \quad \Leftrightarrow \quad t = \tfrac{1}{2}.$$

On a donc :

$$\alpha(1,2) = (1,-7) + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{26}{5}, \tfrac{38}{5}) = (1,-7) + (-\tfrac{13}{5}, \tfrac{19}{5}) = (-\tfrac{8}{5}, -\tfrac{16}{5}) \text{ si bien que } \alpha = -\tfrac{8}{5}.$$

Voici un dessin qui représente la trajectoire de la boule dans le cas étudié ici :



c. D'après la stratégie de résolution des problèmes de billard vue au cours, on sait que pour faire revenir la boule en $(1,-7)$ après les deux rebonds il faut que le joueur fasse partir la boule en direction de :

$$f(g(1,-7)) = f(7,-1) = (-5,5).$$

Le premier point de rebond, se situe sur le segment entre $(1,-7)$ et $(-5,5)$. Il est donc du type :

$$(1-t)(1,-7)+t(-5,5) = (1,-7)+t(-6,12) = (1-6t,-7+12t)$$

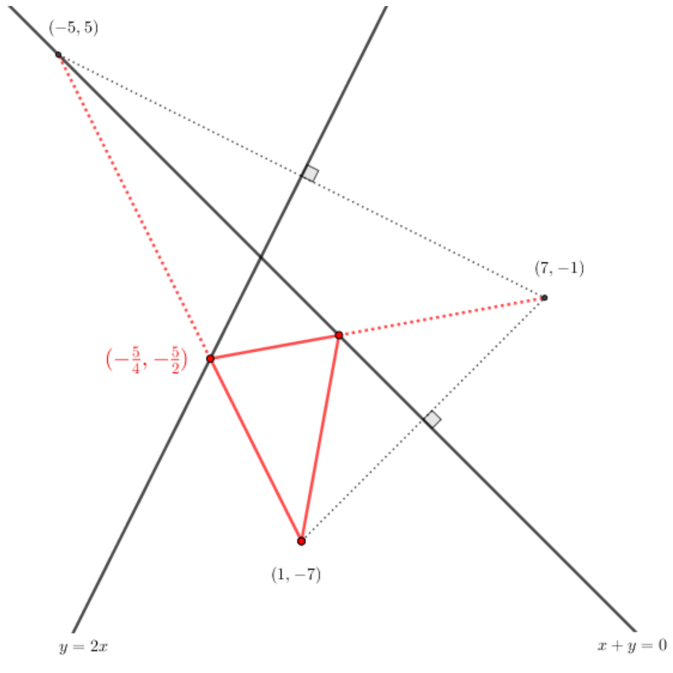
pour un certain réel t entre 0 et 1. Par ailleurs, il est aussi sur la droite d'équation $y=2x$, si bien que :

$$-7+12t = 2(1-6t) \quad \Leftrightarrow \quad 24t = 9 \quad \Leftrightarrow \quad t = \tfrac{3}{8}.$$

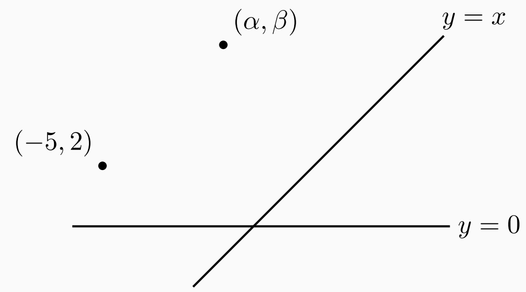
On a donc :

$$\alpha(1,2) = (1,-7)+\tfrac{3}{8}(-6,12) = (1,-7)+(-\tfrac{9}{4},\tfrac{9}{2}) = (-\tfrac{5}{4},-\tfrac{5}{2}) \text{ si bien que } \alpha = -\tfrac{5}{4}.$$

Voici un dessin qui représente alors la trajectoire de la boule jusqu'à son retour au point de départ :



Exercice 7. On munit le plan d'un repère orthonormé direct. En tapant une boule située en $(-5,2)$ un joueur de billard la fait rebondir successivement sur la droite d'équation $y=0$ puis sur celle d'équation $y=x$:



a. Déterminer l'expression de la réflexion f d'axe $y = 0$ et celle de la réflexion g d'axe $y = x$.

b. Trouver la nature et les éléments caractéristiques de l'application composée $f \circ g$.

c. Faire apparaitre sur le dessin la zone formée des points (α, β) que le joueur peut atteindre après les deux rebonds.

Solution:

a. Les axes de f et g sont respectivement incliné de $0°$ et de $45°$ par rapport à l'horizontale. Par conséquent, elles ont pour matrices respectives :

$$S_{2\times 0} = S_0 = \begin{pmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \sin(0) & -\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } S_{2\times\frac{\pi}{4}} = S_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & \sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en base canonique. En conclusion, on a trouvé les expressions suivantes pour f et g :

$$f(x, y) = (x, -y) \text{ et } g(x, y) = (y, x).$$

b. D'après le a. on trouve :

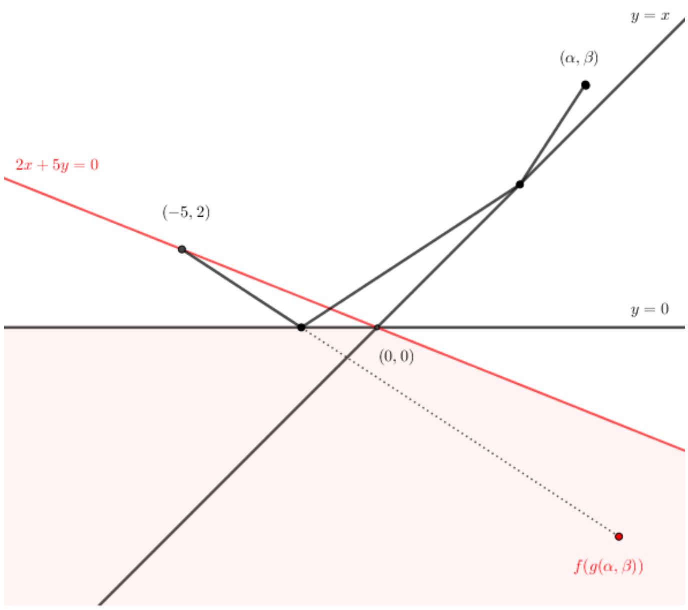
$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(y, x) = (y, -x).$$

Par conséquent, $f \circ g$ a pour matrice :

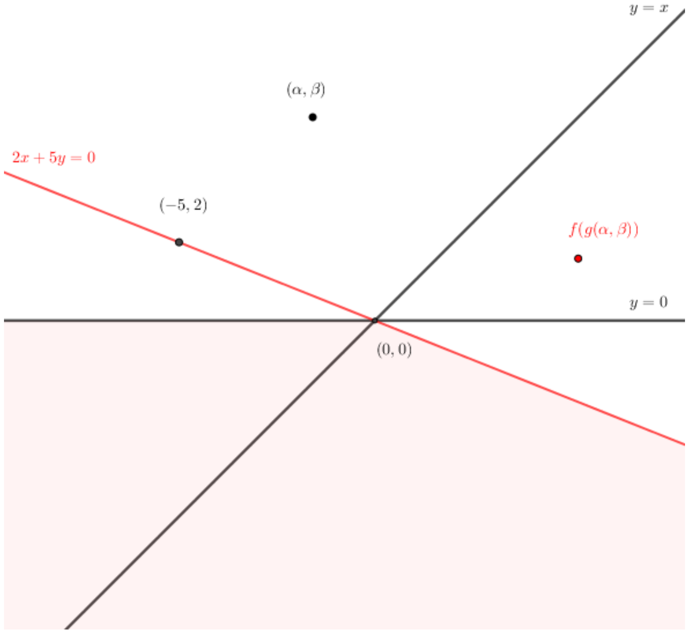
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R_{-\frac{\pi}{2}}.$$

Il s'agit donc de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c. D'après la stratégie de résolution des problèmes de billard vue au cours, les (α, β) recherchés sont ceux dont l'image par $f \circ g$ est "visible" depuis $(-5, 2)$, comme sur le dessin ci-dessous :



Le point $f(g(\alpha, \beta))$ se situe ici "en-dessous" de la droite d'équation $2x + 5y = 0$, si bien que le joueur peut effectivement faire partir la boule dans sa direction et obtenir un premier rebond sur la droite d'équation $y = 0$. Après ce premier rebond puis un deuxième sur $y = x$ la boule rejoindra alors le point (α, β), comme désiré. Si $f(g(\alpha, \beta))$ est au-dessus de la droite d'équation $2x + 5y = 0$ on a par contre le dessin suivant :



Dans ce cas, peu importe le point de rebond que le joueur choisit sur la droite $y = 0$, la boule ne prendra pas ensuite la direction de $g(\alpha, \beta)$, si bien qu'elle ne rejoindra pas (α, β) après un second rebond éventuel sur $y = x$.

La discussion qui précède combinée au résultat obtenu au b. montre maintenant que les (α, β) recherché sont ceux qui "sont sur le billard" et qui, une fois tournés de $-\frac{\pi}{2}$ autour de $(0, 0)$, "tombent en-dessous" de la droite d'équation $2x + 5y = 0$. Ce sont donc ceux qui se trouvent dans la zone rouge du dessin ci-dessous :