

Généralités sur les applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
($1 \leq n, p \leq 3$, partie 1)

Chapitre 3 - Applications linéaires

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($1 \leq n, p \leq 3$)

§1. Définition

ensemble
de départ

ensemble,
d'arrivée

On dit que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est **linéaire** si elle est associée à une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ de la manière suivante. Par exemple, avec $n=3, p=2$:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(1,0,0) = (\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1})$$

$$f(0,1,0) = (\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2})$$

...

$$\underbrace{(x, y, z)}_v \longrightarrow \underbrace{(\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z, \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z)}_{f(v) \text{ "image de } v \text{ par } f"}$$

"image de v "
par f

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \hline \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{array} \right) \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$[f(v)]_{B_{can}} = A [v]_{B_{can}}$$

$$[f(B_{can})]_{B_{can}}$$

La matrice A est appelée la **matrice de f en base canonique**.

Exemples

(a) application nulle

$$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$v \rightarrow 0_{\mathbb{R}^p}$$

matrice nulle
de taille
 $p \times m$

fonction
constante

(b) application identité

$$\text{id}_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$v \rightarrow v$$

matrice identité
 I_n de taille n

(c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \rightarrow (2x, 2y)$

$2x + 0y$ $0x + 2y$

$2v$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$$

$[f(1,0)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ $[f(0,1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$

(homothétie de rapport 2, centrée en $(0,0)$)

(d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \rightarrow (x, 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(projection sur Ox parallèlement à Oy)

(e) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \rightarrow (x - y, 3x + 2y)$

$??$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$[f(1,0)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ $[f(0,1)]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$

$$(A) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \mapsto (-2x + 3y + z, x + y - 3z, x - 4y + 2z)$$

À l'aide de la structure vectorielle on peut manipuler l'expression de f . Par exemple:

$$f(x, y, z) = x(-2, 1, 1) + y(3, 1, -4) + z(1, -3, 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1)$$

$$f(x, y, z) = (-2x + 3y + z)(1, 0, 0) + (x + y - 3z)(0, 1, 0) + (x - 4y + 2z)(0, 0, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (-2 \ 3 \ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ -3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -4 \ 2)$$

En appliquant les méthodes du [Chapitre 1, §10] on peut trouver les relations suivantes:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 1 & -L_2 - L_3 \\ 1 & 1 & -3 & L_2 \\ 1 & -4 & 2 & L_3 \\ \hline C_1 & C_2 & -2C_1 - C_2 & \end{array} \right)$$

si bien que:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ -3) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -4 \ 2) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -1) = \dots \end{aligned}$$

Ces décompositions colonnes-lignes correspondent aux expressions suivantes pour f :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + y - 3z)(-1, 1, 0) + (x - 4y + 2z)(-1, 0, 1) \\ &\quad - (x + y - 3z) - (x - 4y + 2z) = -2x + 3y + z \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$= (x - 2z)(-2, 1, 1) + (y - z)(3, 1, -4) = \dots$$

$$(1, -3, 2) = -2(-2, 1, 1) - (3, 1, -4) \quad \checkmark$$

§2 - Caractérisation

On dit que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ **respecte les structures vectorielles** de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ si:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(tv) = t f(v)$$

et

$$\forall v, v' \in \mathbb{R}^n$$

$$f(v + v') = f(v) + f(v')$$

" f respecte la multiplication scalaire"

" f respecte l'addition"

Proposition

f respecte les structures vectorielles $\Leftrightarrow f$ linéaire

Preuve - Pour fixer les idées, prenons $n=2$ et $p=1$, c'est-à-dire $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

" $\Rightarrow$ " Si f respecte les structures vectorielles:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, 0) + f(0, y) = x \underbrace{f(1, 0)}_{\alpha_{1,1}} + y \underbrace{f(0, 1)}_{\alpha_{1,2}} \\ &\quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ &\quad (x, y) = (x, 0) + (0, y) \quad (x, 0) = x(1, 0) \quad (0, y) = y(0, 1) \\ &= \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y \quad A = (\alpha_{1,1} \quad \alpha_{1,2}) \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Si f est linéaire, on obtient:

$$\begin{aligned} f(tv) &= f(tx, ty) = \alpha_{1,1}tx + \alpha_{1,2}ty = t \underbrace{f(v)}_{\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad v = (x, y) \\ f(v+v') &= f(x+x', y+y') = \alpha_{1,1}(x+x') + \alpha_{1,2}(y+y') \\ &\quad \uparrow \\ &\quad v = (x, y) \quad v' = (x', y') \\ &= \underbrace{(\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y)}_{f(v)} + \underbrace{(\alpha_{1,1}x' + \alpha_{1,2}y')}_{f(v')} \quad \square \end{aligned}$$

§3. Image et rang

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire de matrice A en base canonique. On note r le rang de A , aussi appelé le **rang** de f .

$$r = \text{rg } f = \text{rg } A$$

Définition L'ensemble **image** de f est:

$$\text{Im } f = \{ f(v) \mid \underbrace{v \in \mathbb{R}^n}_{\text{ensemble de départ}} \} \subset \underbrace{\mathbb{R}^p}_{\text{ensemble d'arrivée}}$$

Proposition $\text{Im } f$ est SEV de dimension r de $\mathbb{R}^p$

Preuve. Pour fixer les idées, prenons $n = p = 3$. En écrivant f sous la forme:

$$f(x, y, z) = x \underbrace{f(1, 0, 0)}_{v_1} + y \underbrace{f(0, 1, 0)}_{v_2} + z \underbrace{f(0, 0, 1)}_{v_3}$$

on obtient:

$$\text{Im } f = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} [v_1]_{B_{\text{can}}} & [v_2]_{B_{\text{can}}} & [v_3]_{B_{\text{can}}} \end{pmatrix}$$

$$r = 0$$

$$r = 1$$

$$r = 2$$

$$r = 3$$

$$v_1 = v_2 = v_3 \\ (0, 0, 0)$$

$$\begin{matrix} v_2 & & (0, 0, 0) \\ & v_3 & \\ & & v_1 \end{matrix}$$

$$\{(0, 0, 0)\}$$

droite
vectorielle

$$\begin{matrix} & v_2 & v_3 \\ & \cdot & \cdot \\ v_1 & \cdot & (0, 0, 0) \end{matrix}$$

plan
vectoriel

$$\begin{matrix} v_1 & & v_3 \\ \cdot & & \cdot \\ (0, 0, 0) & & v_2 \end{matrix}$$



Exemples

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $x(2,1) + y(-1,1)$
 $(x,y) \rightarrow (2x-y, x+y)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $\det A = 3 \neq 0$

f est donc de rang 2 : $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$
 $\text{Vect}((2,1), (-1,1))$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $x(1,2) + y(3,6)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
 $(x,y) \rightarrow (x+3y, 2x+6y)$

f est de rang 1 : $\text{Im} f$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Plus précisément :

$$\text{Im} f = \text{Vect}((1,2)) = \text{Vect}((3,6))$$

$y = 2x$

(c) Reprise du §1 (f)

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
 $(x,y,z) \rightarrow (-2x+3y+z, x+y-3z, x-4y+2z)$
 $x(-2,1,1) + y(3,1,-4) + z(1,-3,2)$ $-2C_1 - C_2$

On a $r=2$ donc $\text{Im} f$ est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En voici quelques bases :

$$(-2,1,1), (3,1,-4) \quad / \quad (-2,1,1), (1,-3,2) \quad / \quad \dots$$

On peut montrer que $\ln f$ a pour équation
 $x + y + z = 0$ (lissé en exo)

Généralités sur les applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
($1 \leq n, p \leq 3$, partie 2)

§4. Noyau

Mêmes notations qu'au §3.

Définition Le **noyau** de f :

$$\text{Ker } f = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^p} \} \subset \mathbb{R}^n$$

ensemble de départ

Proposition $\text{Ker } f$ est un SEV de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - r$

Théorème du rang

Preuve. Pour fixer les idées, prenons $n = p = 3$. Notons alors:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$$

r lignes indépendantes

si bien que :

$$\text{Ker } f : \begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = 0 \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = 0 \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z = 0 \end{cases}$$

$$r=0$$

$$r=1$$

$$r=2$$

$$r=3$$

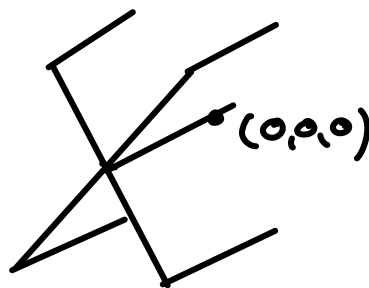
$$\mathbb{R}^3$$

3-0



plan vectoriel

3-1



droite vectorielle

3-2

$$\{(0,0,0)\}$$

3-3



Exemples

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (x+3y, 2x+6y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x+6y=0 \end{cases}$$

On a $r=1$ donc $\text{Ker} f$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Plus précisément :

$$\text{Ker} f: x+3y=0$$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (2x-y, x+y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

On a $r=2$ donc $\text{Ker} f = \{(0,0)\}$

(c) Reprise du §1, (f)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} -L_2 L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$

$$(x,y,z) \mapsto (-2x+3y+z, x+y-3z, x-4y+2z)$$

On a $n=2$, donc $\text{Ker } f$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Pour en trouver une base, résolvons le système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (2z, z, z) = z(2, 1, 1)$$

$\text{Ker } f$ est la droite vectorielle $\text{Vect}((2, 1, 1))$

§5. Décomposition colonne-ligne

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire de matrice A en base canonique. Écrivons alors :

$$A = C_1 L_1 + \dots + C_n L_n \quad (n = \text{rg } f)$$

décomposition colonne-ligne
minimale de A

qui correspond, à la manière du §1, (8)
à une certaine expression pour f .
Par exemple, avec $n = p = 3$:

$$f(x, y, z) = \underbrace{L_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\substack{[\sigma_1]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = C_1}} + \dots + (\alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n z) \sigma_n$$

décomposition de $f(x, y, z)$ sur $\text{Im} f$

Il est alors clair que :

$$\text{dim} = r \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Im} f \subset \text{Vect}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \\ \text{Solutions de} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dim} \leq r \\ \text{donc} = r \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n x + \beta_n y + \gamma_n z = 0 \end{array} \right. \subset \text{Ker} f \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dim} = 3 - r \end{array} \right.$$

$$\text{dim} \geq 3 - r \quad \text{donc} = 3 - r$$

Au vu des dimensions, ces inclusions $\subset$ sont en fait des égalités $=$. Autrement dit :

$$A = \underbrace{C_1 L_1}_{\text{base de Im} f} + \dots + \underbrace{C_n L_n}_{\substack{\text{jeu minimal} \\ \text{d'équations pour Ker} f}}$$

base de $\text{Im} f$

jeu minimal
d'équations pour $\text{Ker} f$

Exemples

(a) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \rightarrow \underbrace{(2x - 3y + z, -4x + 6y - 2z)}_{(2x - 3y + z) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}} \downarrow x-2$$

On a $n=1$ et :

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, -2)) \quad \begin{array}{l} \text{droite} \\ \text{vect} \\ \text{orielle} \end{array}$$

plan vect-
-orielle

$$\text{Ker } f: 2x - 3y + z = 0$$

(b) Reprene du § 1, (f)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (-2x + 3y + z, x + y - 3z, x - 4y + 2z)$$

On a trouvé différentes décompositions de A :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (-2 \ 3 \ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ -3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -4 \ 2) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -1) = \dots \end{aligned}$$

qui correspondent aux expressions suivantes de f :

$$f(x, y, z) = x(-2, 1, 1) + y(3, 1, -4) + z(1, -3, 2)$$

$$\text{Ker } f: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \times$$

$$\text{Im } f = \text{Vect}((-2, 1, 1), (3, 1, -4), (1, -3, 2))$$

✓ mais pas optimal

$$f(x,y,z) = (-2x+3y+z)(1,0,0) + (x+y-3z)(0,1,0) + (x-4y+2z)(0,0,1)$$

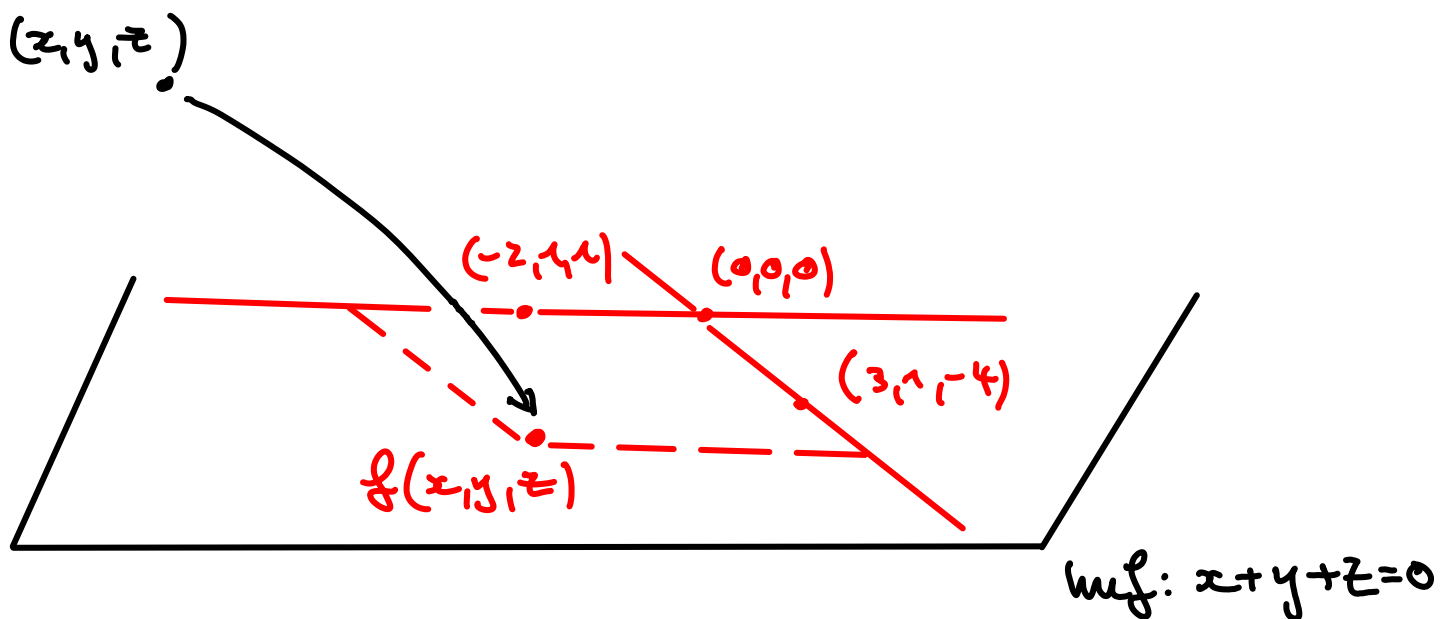
$$\text{Im}f = \text{Vect}((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) \quad \times$$

$$\text{Ker}f: \begin{cases} -2x+3y+z=0 \\ x+y-3z=0 \\ x-4y+2z=0 \end{cases} \quad \checkmark \text{ mais pas optimal}$$

$$f(x,y,z) = (x-2z)(-2,1,1) + (y-z)(3,1,-4)$$

$$\text{Im}f = \text{Vect}((-2,1,1), (3,1,-4)) \quad \checkmark \text{ optimal}$$

$$\text{Ker}f: \begin{cases} x-2z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \quad \checkmark \text{ optimal}$$



§6. Le cas inversible

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire de matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si $\text{rg } f = n$ on dit que f est **inversible** et on note f^{-1} l'application de matrice:

$$A^{-1} \in M_n(\mathbb{R}) \quad \left. \vphantom{A^{-1}} \right\} \text{ [Chapitre 1, §6 et §12]}$$

en base canonique, appelée **inverse** de f .
On sait qu'elle vérifie, pour tous $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$f(v) = w \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(w) = v$$

$$A[v]_{B_{\text{can}}} = [w]_{B_{\text{can}}}$$

$$A^{-1}[w]_{B_{\text{can}}} = [v]_{B_{\text{can}}}$$

Autrement dit, f^{-1} envoie w sur son unique **antécédent** par f . On a aussi:

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } \text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$$

"tout w est un $f(v)$ "

" $0_{\mathbb{R}^n}$ est le seul antécédent de $0_{\mathbb{R}^n}$ "

Exemples

$$(a) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \det A = 3 \neq 0$$

$$\mathbb{R}^2 \leftarrow \mathbb{R}^2 : f^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(a+b, -a+2b) \leftarrow (a, b)$$

unique antécédent
de (a, b) par f

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ x + y = b \end{cases}$$

$$(b) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x - y, x - \frac{1}{2}y)$$

$$(2x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} (2 - 1)$$

f n'est pas inversible. Par exemple,
 $(4, 5)$ n'a aucun antécédent par f ,
 $(4, 2)$ en a une infinité ...
 droite $2x - y = 4$

Généralités sur les applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
($1 \leq n, p \leq 3$, partie 3)

§7 - Ensembles des antécédents

Soit $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ linéaire de matrice A en base canonique. Soit $w \in \mathbb{R}^p$.

Définition L'ensemble des antécédents de w par f est :

$$f^{-1}(\{w\}) = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \underbrace{f(v) = w}_{\substack{\text{égalité dans} \\ \text{l'ensemble d'arrivée}}}\} \subset \underbrace{\mathbb{R}^m}_{\substack{\text{ensemble} \\ \text{de départ}}}$$

Cas particulier $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\}) = \text{Ker} f$

$w = 0_{\mathbb{R}^p}$

On peut trouver l'ensemble des antécédents en résolvant un système. Par exemple avec $m=3$, $p=2$:

$$\underbrace{v \in f^{-1}(\{w\})}_{(x,y,z)} \iff \begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = a \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = b \end{cases} \quad \begin{matrix} (a,b) \\ \swarrow \end{matrix}$$

Proposition On a :

$$f^{-1}(\{w\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } w \notin \text{Im} f \\ v_0 + \text{Ker} f & \text{si } w \in \text{Im} f \end{cases}$$

v_0 : antécédent particulier de w par f

S'il est non vide, on voit donc que $f^{-1}(\{w\})$ est un sous-espace affine dont le SEV associé est $\text{Ker } f$.

Preuve. Si $w \notin \text{Im } f$ alors :
 $\{f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, f(v) \neq w \Leftrightarrow \nexists v \in \mathbb{R}^n, f(v) = w$$

w n'a aucun antécédent par f

L'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ est donc bien vide. Supposons maintenant que $w \in \text{Im } f$, si bien que l'on peut écrire:

$$w = f(v_0) \quad \text{antécédent particulier}$$

Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a alors :

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \Leftrightarrow f(v) = w = f(v_0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{f(v - v_0) = 0_{\mathbb{R}^p}}_{v - v_0 \in \text{Ker } f}$$

f est linéaire $\rightarrow$

$$\Leftrightarrow v \in v_0 + \text{Ker } f \quad \square$$

Exemples

(a) Si $n = p$ et f inversible alors:

$$f^{-1}(\{w\}) = \{ \underbrace{f^{-1}(w)}_{\text{unique antécédent de } w \text{ par } f} \}$$

En général, l'application f^{-1} n'existe pas!

(b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \rightarrow \underbrace{(x-y, -2x+2y)}_{(x-y)(1, -2)}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (1 \ -1)}$$

f est de rang 1 et on a:

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, -2))$$

$$\text{Ker } f: x - y = 0$$
$$\text{Vect}((1, 1)) \checkmark$$

équation $\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & -2 \end{vmatrix} = 0$

$$2x + y = 0 \checkmark$$

$$\in \text{Im } f$$

$$f^{-1}(\{ \underbrace{(3, 1)}_{\notin \text{Im } f} \}) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{ \underbrace{(1, -2)}_{\in \text{Im } f} \}) : x - y = 1$$

$$(1, 0) + \text{Ker } f = (3, 2) + \text{Ker } f$$

" " " " " "

$$x^{-2} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ -2x + 2y = 1 \end{array} \right\} \times 1/3$$

$$x^{-2} \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2x + 2y = -2 \end{array} \right\} \times 1/3$$

$$(c) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) \rightarrow (2x + y - 3z, 0, 4x + 2y - 6z)$$

Soit $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors:

$$\underbrace{v}_{(x, y, z)} \in f^{-1}(\{w\}) \Leftrightarrow f(x, y, z) = \underbrace{(a, b, c)}_{f(v)=w}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 0 = b \\ 4x + 2y - 6z = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 0 = b \\ 0 = c - 2a \end{cases}$$

condition sur w
pour que $f^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset$

Par exemple, pour $w = (0, 1, 0)$ on a:

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ 0 = 1 \quad \times \\ 0 = 0 \end{cases}$$

L'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ est vide. Prenons maintenant $w = (1, 0, 2)$. On obtient:

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ 0 = 0 \quad \checkmark \\ 0 = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

On peut en déduire :

$$\underbrace{\text{Im} f : x = \frac{z}{2}, y = 0}_{\text{Vect}((1,0,2))}$$

$$\begin{aligned} & (a,b,c) \in \text{Im} f \\ & \Leftrightarrow a = \frac{c}{2}, b = 0 \end{aligned}$$

Si $w = (a, 0, 2a) \in \text{Im} f$, alors :

$$f^{-1}(\{w\}) : 2x + y - 3z = a$$

C'est le plan affine parallèle à $\text{Ker} f$ passant par $\underbrace{(\frac{a}{2}, 0, 0), (0, a, 0) \dots}_{\text{antécédents particuliers}}$ On a :

$$\text{Ker} f : 2x + y - 3z = 0 \quad \text{plan vectoriel associé}$$

§8 - Déterminant

Mêmes notations qu'au §7. On suppose que $n = p$. On appelle alors **déterminant** de f celui de A :

$$\det f = \det A$$

Proposition ($n=2$) Pour toute visualisation de $\mathbb{R}^2$ et tous $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sigma(f(v_1), f(v_2)) = \det f \cdot \sigma(v_1, v_2)$$

[Chapitre 2, §8]

" Quand on applique f ,
l'aire orientée est
 $\times$ par $\det f$

Preuve. Notons $\mathcal{B}_{can} = e_1, e_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$P = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{array} \right)$$

$[v_1]_{\mathcal{B}_{can}}$ $[v_2]_{\mathcal{B}_{can}}$

si bien que :

$$AP = \left(\begin{array}{c|c} \alpha x_1 + \beta y_1 & \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \gamma x_1 + \delta y_1 & \gamma x_2 + \delta y_2 \end{array} \right)$$

$[f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}}$ $[f(v_2)]_{\mathcal{B}_{can}}$

D'après [Chapitre 2, §8], on trouve alors :

$$\sigma(f(v_1), f(v_2)) = \det(AP) \sigma(e_1, e_2)$$

$$= \det A \underbrace{\det P}_{\sigma(v_1, v_2)} \sigma(e_1, e_2)$$

[Série 2, Ex 9] →

$$= \det f \sigma(v_1, v_2) \quad \square$$

Généralités sur les applications linéaires $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$
($1 \leq n, p \leq 3$, partie 4)

§9. Structure vectorielle

Il y a sur les applications linéaires $f, g \dots \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une **multiplication scalaire** et une **addition** qui reflètent celles sur leurs matrices $A, B \dots \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Par exemple, avec $n = p = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

On a alors:

$$\lambda f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow \lambda f(v) = (\lambda \alpha_{1,1}x + \lambda \alpha_{1,2}y, \lambda \alpha_{2,1}x + \lambda \alpha_{2,2}y)$$

$(\lambda f)(v)$

dont la matrice en base canonique est:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{1,1} & \lambda \alpha_{1,2} \\ \lambda \alpha_{2,1} & \lambda \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

On a aussi:

$$f + g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \rightarrow \underbrace{f(v) + g(v)}_{(f+g)(v)} = ((\alpha_{1,1} + \beta_{1,1})x + (\alpha_{1,2} + \beta_{1,2})y, (\alpha_{2,1} + \beta_{2,1})x + (\alpha_{2,2} + \beta_{2,2})y)$$

qui correspond bien à la matrice

$$A+B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} \\ \alpha_{21} + \beta_{21} & \alpha_{22} + \beta_{22} \end{pmatrix}$$

Examinons le comportement du rang et du déterminant par ces opérations.

Proposition

$$\text{rg}(\lambda f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{rg } f & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Preuve

$$\text{Im}(\lambda f) = \left\{ \underbrace{\lambda f(v)}_{f(\lambda v)} \mid v \in \mathbb{R}^n \right\} \begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^p}\} & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{Im } f & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

□

Proposition

$$\text{rg}(f+g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$$

Preuve. Notons $\text{rg } f = r$ et $\text{rg } g = q$. Alors:

$$\begin{cases} A = C_1 L_1 + \dots + C_r L_r \\ B = C_1' L_1' + \dots + C_q' L_q' \end{cases} \Rightarrow A+B = \underbrace{C_1 L_1 + \dots + C_q' L_q'}_{\substack{r+q \text{ termes mais} \\ \text{pas forcément minimaux}}}$$

si bien que $\text{rg}(A+B) \leq r+q$.

□

⚠ Pas de formule simple du type :
 $\ln(f+g) =$ en fonction de $\ln f$ et $\ln g$

Proposition ($n=p$)

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det f \quad \text{vu au Chapitre 1}$$

⚠ Pas de formule simple du type :
 $\det(f+g) =$ en fonction de $\det f$ et $\det g$

Exemples

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = 1$
 $\det = 0$ (for $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$)
 $\text{rg} = 1$
 $\det = 0$ (for $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$)

$\text{rg} = 2$
 $\det = -1$ (for $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$)

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = 1$
 $\det = 0$ (for $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$)

$\text{rg} = 1$
 $\det = 0$ (for $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$)

$\text{rg} = 1$
 $\det = 0$ (for $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$)

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg} = 2$
 $\det = -3$ (for $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$)

$\text{rg} = 2$
 $\det = 1$ (for $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rg} = 1 \\ \det = 0}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rg} = 2 \\ \det = -2}}$$

$$(c) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rg} = 0 \\ \det = 0}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rg} = 2 \\ \det = -1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{rg} = 2 \\ \det = -1}}$$

§ 10. Composition

$$AB, A \in M_{p,m}(\mathbb{R}), B \in M_{m,s}(\mathbb{R})$$

Le produit matriciel correspond au niveau des applications linéaires à la **composition**. Par exemple, avec $n = p = 2$:

$$\underbrace{f \circ g}_{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, g: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

On a alors:

$$f \circ g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\underbrace{v}_{(x,y)} \rightarrow \underbrace{f(g(v))}_{(f \circ g)(v)} = f(\underbrace{\beta_{1,1}x + \beta_{1,2}y}_X, \underbrace{\beta_{2,1}x + \beta_{2,2}y}_Y)$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= (\alpha_{1,1}X + \alpha_{1,2}Y, \alpha_{2,1}X + \alpha_{2,2}Y) \\
 &= ((\alpha_{1,1}\beta_{1,1} + \alpha_{1,2}\beta_{2,1})x + (\alpha_{1,1}\beta_{1,2} + \alpha_{1,2}\beta_{2,2})y, \\
 &\quad (\alpha_{2,1}\beta_{1,1} + \alpha_{2,2}\beta_{2,1})x + (\alpha_{2,1}\beta_{1,2} + \alpha_{2,2}\beta_{2,2})y)
 \end{aligned}$$

dont la matrice en base canonique est bien

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\beta_{1,1} + \alpha_{1,2}\beta_{2,1} & \alpha_{1,1}\beta_{1,2} + \alpha_{1,2}\beta_{2,2} \\ \alpha_{2,1}\beta_{1,1} + \alpha_{2,2}\beta_{2,1} & \alpha_{2,1}\beta_{1,2} + \alpha_{2,2}\beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

Proposition On a :

$$\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg } f$$

avec égalité si g est inversible.

Preuve. Notons $\text{rg } f = r$. Alors :

$$A = \underbrace{C_1 L_1 + \dots + C_r L_r}_{\text{décomposition colonne ligne minimale}} \Rightarrow AB = \underbrace{C_1 (L_1 B) + \dots + C_r (L_r B)}_{\substack{\text{matrices} \\ \text{lignes} \\ r \text{ termes mais pas} \\ \text{forcément minimales}}}$$

si bien que $\text{rg}(AB) \leq \text{rg } A$. Si B est inversible, on obtient aussi :

$$\text{rg } A = \text{rg}((AB)B^{-1}) \leq \text{rg}(AB)$$

ce qui montre l'égalité. Autre argument possible (laissé en exercice). Montrer que:

$$\text{Im}(f \circ g) \subset \text{Im } f$$

$\{f(v) \mid v \in \text{Im } g\}$ $\{f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$

avec égalité si g est inversible. $\square$

Proposition On a:

$$\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg } g$$

avec égalité si f est inversible.

Preuve. Analogue à la proposition précédente $\square$

Proposition ($n=p=s$) On a:

$$\det(f \circ g) = \det f \det g$$

Preuve. Déjà vu pour $n=2$ / [Série 2, Ex 9]
Supposons que $n=3$. Matriciellement, on veut montrer que:

$$\det(AB) = \det A \det B \quad (*)$$

Tout d'abord, imaginons que $\text{rg} B \leq 2$
Dans ce cas, on a: car $\text{rg}(AB) \leq \text{rg} B \leq 2$

$$\det B = 0 \quad \text{et} \quad \det(AB) \stackrel{\downarrow}{=} 0$$

L'égalité (*) est donc bien satisfaite.
D'ores et déjà, on se place dans le cas où B est inversible. Supposons d'abord que:

$B = E$
matrice élémentaire
 I_3 modifiée par ...

$$C_i \leftrightarrow C_j$$

$$C_i \leftarrow \lambda C_i$$

$$C_i \leftarrow C_i + \mu C_j$$

$$\begin{cases} \det(AE) = -\det A \\ \det E = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \det(AE) = \lambda \det A \\ \det E = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \det(AE) = 1 \det A \\ \det E = 1 \end{cases}$$

Dans les 3 cas, l'égalité (*) est encore satisfaite. En revenant au cas d'une matrice B inversible quelconque, on sait que:

$$B = E_1 \dots E_k \quad / \quad [\text{Chapitre 1, § 12}]$$

où les E_i sont des matrices élémentaires. On obtient alors:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(AE_1 \dots E_k) \\ &= \det(AE_1 \dots E_{k-1}) \det E_k \end{aligned}$$

= ...

$$= \det A \underbrace{\det E_1 \dots \det E_k}_{\det B \text{ par le cas } A = I_3} \\ = \det A \det B \quad \square$$

Proposition ($n=p$) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a:

$$\det(\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}) = (\det f)^k$$

Preuve. Récurrence sur k . □

Proposition ($n=p$) Si f est inversible, alors:

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$$

Preuve. On part de l'égalité:

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \quad \Bigg) \quad AA^{-1} = I_n$$

puis on applique le déterminant:

$$\det(f \circ f^{-1}) = \det f \underbrace{\det(f^{-1})}_{1/\det f} = \det(\text{id}_{\mathbb{R}^n}) = 1 \quad \square$$