

Calcul matriciel (partie 1)

Chapitre 1 - Calcul matriciel

§1. Définition et premières opérations

Une **matrice** est un tableau rectangulaire rempli de coefficients réels.

matrice nulle

matrice identité

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 {}^t \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \dots
 \end{array}$$

$$M_{2,2}(\mathbb{R}) = M_2(\mathbb{R}) \text{ taille } 2 \times 2$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \end{pmatrix} \\
 \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = {}^t \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 \dots
 \end{array}$$

$$M_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ taille } 2 \times 1$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -3 \end{pmatrix}}_{3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}}
 \end{array}$$

$$M_{1,2}(\mathbb{R}) \text{ taille } 1 \times 2$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1/5 \end{pmatrix} \\
 \dots \\
 \begin{pmatrix} \pi \end{pmatrix}
 \end{array}$$

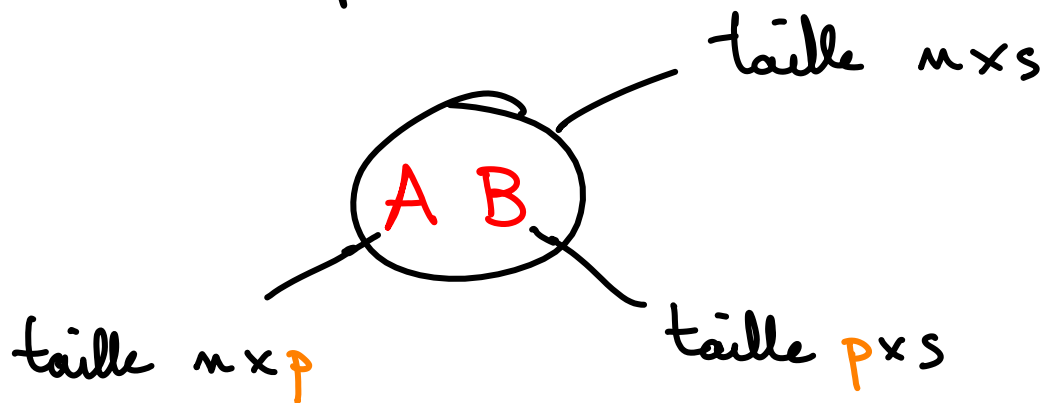
$$M_1(\mathbb{R}) \text{ taille } 1 \times 1$$

Voici quelques opérations sur les matrices :

multiplication scalaire $\times A$, addition $(A, B \text{ de même taille})$ $A + B$, transposée ${}^t A$

§2. Produit matriciel

On peut **multiplier** entre elles deux matrices de tailles compatibles :



Exemples

$$(a) \quad \underbrace{(2 \ 3)}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{2 \times 1} = 2 \times 1 + 3 \times (-3) = -7$$

$$(2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$(2 \ 3) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \underbrace{(2 \ 3)}_{1 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -7 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\neq \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} (2 \ 3)}_{\text{non défini}}$$

(c)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -7 & 31 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the multiplication of two 2x2 matrices. Arrows point from the dimensions of the matrices to the resulting matrix:

- $(2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ points to the first row of the result.
- $(2 \ 3) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ points to the second row of the result.
- $(4 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ points to the first column of the result.
- $(4 \ -1) \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ points to the second column of the result.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -2 \\ 22 & -16 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{2 \times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}}_{1 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the multiplication of a 2x1 matrix and a 1x2 matrix. The result is a 2x2 matrix. Dimensions are indicated by arrows:

- $2C$ (columns) and $3C$ (columns) are indicated below the result matrix.
- $2L$ (rows) and $3L$ (rows) are indicated above the result matrix.
- Operations on the result matrix are indicated by arrows: $\times 3/2$ and $\times 2/3$.
- Operations on the original matrices are indicated by arrows: $\times -3$ and $\times -1/3$.

§3 - Règles de calcul

Les opérations vues aux §1 et §2 vérifient de nombreuses propriétés du calcul algébrique usuel :

$$A+B = B+A, \quad A+(B+C) = (A+B)+C$$

$$\underline{A(B+C) = AB+AC}, \quad A(BC) = (AB)C \dots$$

voir [Série 1, Ex 7]

Mais il y a des exceptions. En général :

$$\underline{AB \neq BA}, \quad \underline{(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2}$$

voir [Série 1, Ex 5]

$$A^2 - B^2 + AB - BA$$

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0 \dots$$

§4. Opérations élémentaires

On distingue 3 types d'**opérations élémentaires** sur les lignes / colonnes d'une matrice:

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

$$L_i \leftarrow \lambda L_i$$

$$L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$$

$$C_i \leftrightarrow C_j$$

$$C_i \leftarrow \lambda C_i$$

$$C_i \leftarrow C_i + \mu C_j$$

$$\lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$i \neq j, \mu \in \mathbb{R}$$

Chacune correspond à la multiplication à gauche / droite par une **matrice élémentaire**

matrice identité "modifiée" par l'opération

Exemples

$$(a) \quad \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow 2C_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$$

(b) (Échelonnement en ligne)

1^{er} pivot

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}}_A$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_1 \end{aligned}$$

"nettoyage"
de la 1^{ère}
colonne

"nettoyage" sous le 2^{ème} pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{2^{ème} pivot}$$

$E_2 E_1 A$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_3 E_2 E_1 A$

matrice échelonnée en lignes
lignes de plus en plus courtes

où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) (Échelonnement en colonne)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

A

$$C_1 \leftrightarrow C_2$$

"nettoyage" de la 1^{ère} ligne

$$\begin{aligned} C_2 &\leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 &\leftarrow C_3 + 3C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -3 & -5 & 9 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$A E_4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$A E_4 E_5 E_6$$

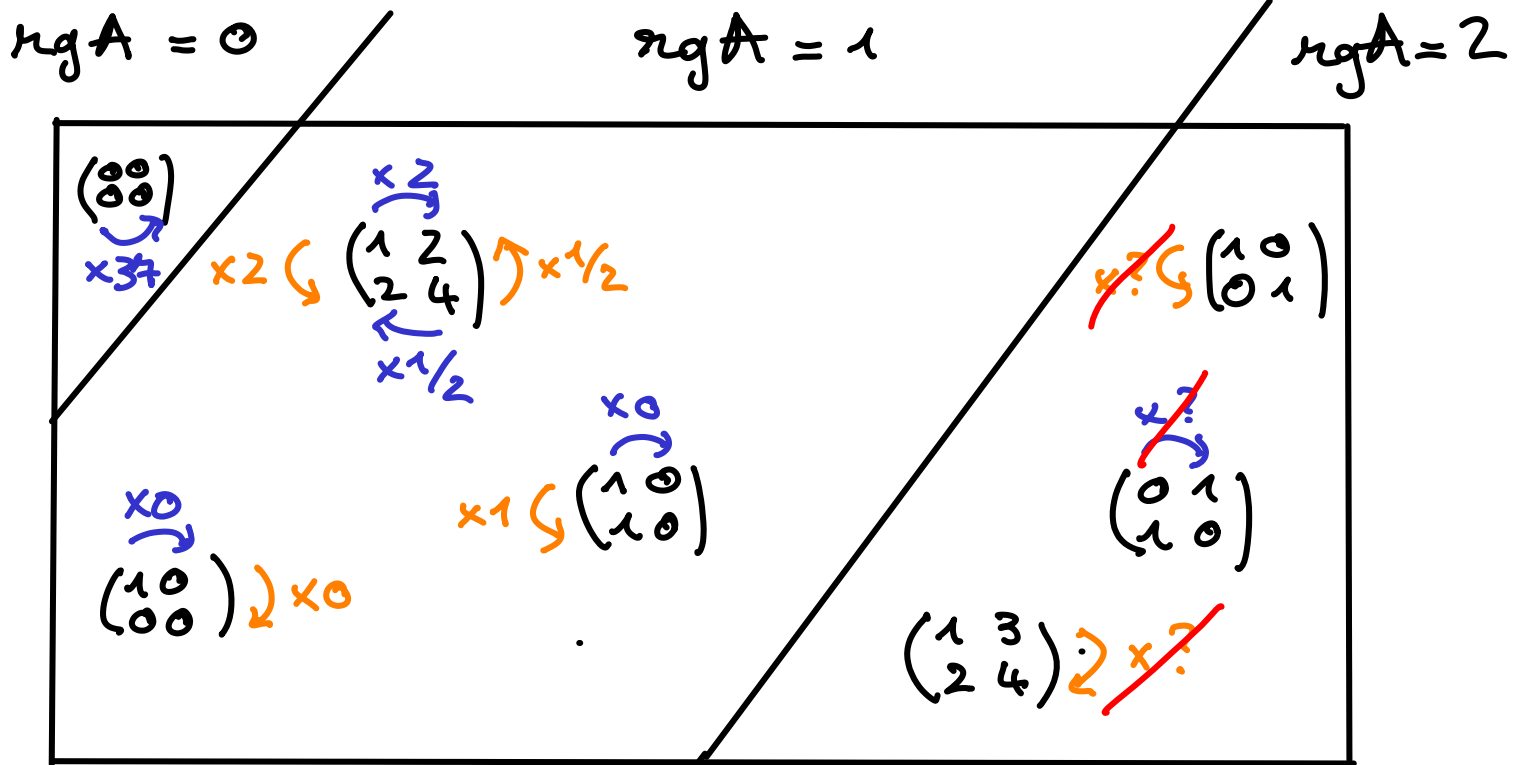
matrice échelonnée en colonnes
 "colonnes de + en + courtes"

où $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul matriciel (partie 2)

§4 - Rang (2x2)

On attribue à $A \in M_2(\mathbb{R})$ son **rang** selon le schéma suivant:



Relation de proportionnalité entre les 2 lignes/colonnes

Pas de relation de proportionnalité

* non nuls

C'est aussi le nombre de pivots quand on échelonne A en lignes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

De même quand on échelonne en colonnes.

Exemples

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est de rang 1. On a:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2(1 \ 2) \\ 3(1 \ 2) \end{matrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} (2 \ 4) \\ 3/2(2 \ 4) \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} (2 \ 4) = \dots$$

Il y a plein de façons de décomposer A ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} (2 \ 4) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} (1/2 \ 1) = \dots$$

décompositions colonnes-lignes
minimales

Elles reflètent par exemple la structure des systèmes linéaires de matrice A :

$$\begin{cases} 2x + 4y = \dots \\ 3x + 6y = \dots \end{cases}$$

$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2(1x + 2y) = \dots \\ 3(1x + 2y) = \dots \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2)$

$$\begin{cases} 1(2x + 4y) = \dots \\ 3/2(2x + 4y) = \dots \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} (2 \ 4)$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \end{pmatrix}$ est de rang 2 : il n'y a pas de relation de proportionnalité entre les colonnes.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rg} = 1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{rg} = 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

Les décompositions colonne-ligne minimales de A sont de longueur 2.
on ne peut pas faire mieux

§5. Déterminant (2×2)

On appelle déterminant d'une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ le nombre réel :

$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}}_{\det A} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} = \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}$$

Proposition On a :

$$\det A = 0 \iff \text{rg} A \leq 1$$

Preuve. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ l'équivalence est claire.
 Sinon, supposons par exemple que $\alpha_{1,2} \neq 0$

$$\operatorname{rg} A \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha_{1,2} \neq 0$$

"L2/L1"

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\alpha_{2,2}}{\alpha_{1,2}} \alpha_{1,1} = \alpha_{2,1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\alpha_{1,1} \alpha_{2,2} - \alpha_{1,2} \alpha_{2,1}}_{\det A} = 0 \quad \square$$

Proposition $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Preuve [Série 2, Exercice 9]

□

§6. Inversion (2x2)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Proposition Si $\det A \neq 0$, la matrice :
 $\text{rg } A = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}} \begin{pmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{pmatrix}$$

est appelée l'**inverse** de A . Elle vérifie :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$$

Preuve - Calcul direct. Par exemple :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}} \begin{pmatrix} \alpha_{2,2} & -\alpha_{1,2} \\ -\alpha_{2,1} & \alpha_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}A} \\ & = \frac{1}{\alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1}} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} - \alpha_{1,2}\alpha_{2,1} & 0 \\ 0 & -\alpha_{2,1}\alpha_{1,2} + \alpha_{1,1}\alpha_{2,2} \end{pmatrix} \\ & = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} \quad \square \end{aligned}$$

Si $\det A = 0$, alors A n'a pas d'inverse
 puisque pour tout "candidat A^{-1} ", on a :

$$\underbrace{\det(AA^{-1})}_{\det A \det(A^{-1})} = 0 \quad \Rightarrow \quad AA^{-1} \neq \underbrace{I_2}_{\det I_2 = 1}$$

Quand $\det A \neq 0$ on dit que A est inversible.

Exemples

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et:
 $\det A = -2 \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice A^{-1} est liée à la résolution des systèmes linéaires de matrice A :

$$\begin{cases} 2x + 4y = a \\ 3x + 5y = b \end{cases} \xRightarrow{x A^{-1}} \begin{cases} x = -5/2 a + 2b \\ y = 3/2 a - b \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.
 $\det A = 0$

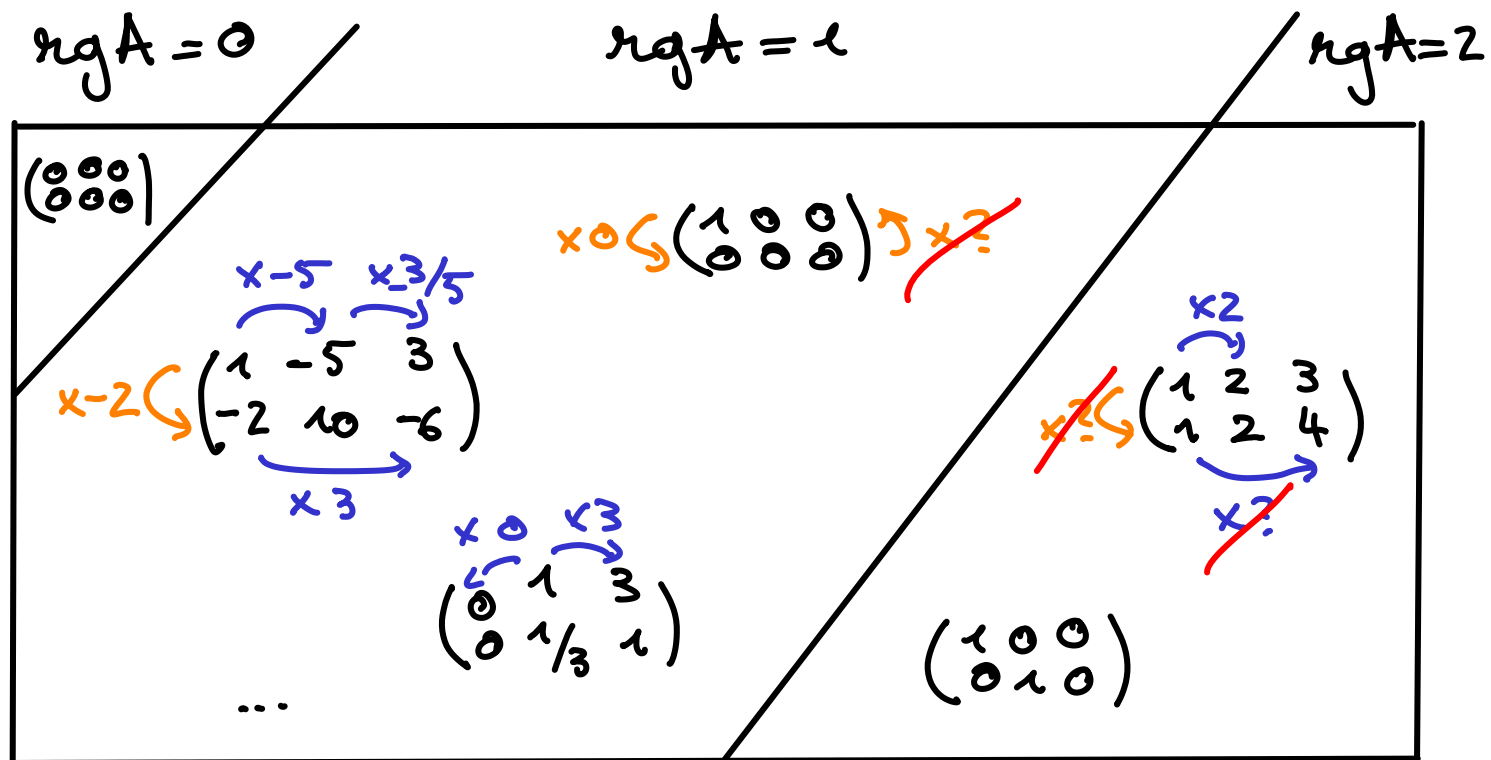
Le système linéaire :

$$\times 3/2 \hookrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = a \\ 3x + 6y = b \end{cases} \rightarrow \times 3/2 ???$$

possède parfois des solutions et parfois pas
 si $b = 3/2 a$ si $b \neq 3/2 a$

§ 4. Rang (2x3)

On attribue à $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ son rang de la manière suivante :



Relations de prop
 entre les 2 lignes /
3 colonnes
 $2 - 2 = 0$

Pas de telles relations
 de proportionnalité

C'est aussi le nombre de pivots quand on échelonne en colonnes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$$

De même quand on échelonne en lignes.

Par ailleurs, en utilisant un résultat du §5, on voit que:

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{pmatrix} \leq 1$$

si et seulement si:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{vmatrix} = 0}_{C_1, C_2 \text{ proportionnelles}} \text{ et } \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} = 0}_{C_1, C_3 \text{ prop.}} \text{ et } \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix} = 0}_{C_2, C_3 \text{ prop.}}$$

Exemples

(a) $A = \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 4 & -1/3 \\ 3 & -12 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{x-3} \text{ est de rang 1.}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/4 & 1 & -1/12 \end{pmatrix} = \dots$$

décompositions colonne-ligne minimales

Calcul matriciel (partie 3)

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\xrightarrow{x \frac{1}{2} \quad x?}$ $\xrightarrow{x?}$ est de rang 2
 $\neq \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} (\gamma \delta \varepsilon)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 4)}_{\text{décomp. minimale}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} (0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \quad \text{pas minimale}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1)}_{\text{décomp. minimale}} = \dots$$

§8 - Rang (3×2)

"Transposé" du §7.

§9 - Déterminant (3×3)

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. On définit le **déterminant** de A par la formule :

$$\det \underbrace{A}_{\left[\alpha_{i,j} \right]_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \dots$$

$$= \alpha_{1,1} \alpha_{2,2} \alpha_{3,3} + \alpha_{1,2} \alpha_{2,3} \alpha_{3,1} + \alpha_{1,3} \alpha_{2,1} \alpha_{3,2} \\ - \alpha_{1,3} \alpha_{2,2} \alpha_{3,1} - \alpha_{1,2} \alpha_{2,1} \alpha_{3,3} - \alpha_{1,1} \alpha_{2,3} \alpha_{3,2}$$

On peut organiser le calcul de $\det A$ en **développant** par rapport à une ligne ou une colonne.

dév / C_1

$$\det A = \alpha_{1,1} \begin{vmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} - \alpha_{2,1} \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha_{3,1} \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \end{vmatrix}$$

dév / L_2

$$= -\alpha_{2,1} \begin{vmatrix} \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} + \alpha_{2,2} \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} - \alpha_{2,3} \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$= \dots$$



Attention à l'alternance des signes, selon le tableau

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Voici quelques propriétés (aussi valables en 2×2) du déterminant.

► Antisymétrie Par l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$, $\det(A)$ est changé en son opposé ! Par exemple :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} \quad \text{--- } (L_1 \leftrightarrow L_3)$$

Preuve. Vérification directe pour 2×2
On en déduit le cas 3×3 par développement selon la ligne ou la colonne qui n'est pas modifiée.

$$\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \gamma\beta - \alpha\delta = - \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

► Extraction d'un facteur Par $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$, $\det(A)$ est changé en $\lambda \det(A)$. Par exemple :

$$\det A' = \lambda \det A \quad \text{--- } (C_3 \leftarrow \lambda C_3)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \lambda \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \lambda \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \lambda \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}$$

"on peut extraire λ "

Preuve. Développer selon la ligne ou la colonne où le facteur apparaît

► "Opération du pivot" Par l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, $\det A$ est inchangé. Par exemple: $(C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2)$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} + \lambda \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} + \lambda \alpha_{2,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} + \lambda \alpha_{3,2} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}$$

Preuve. On développe selon la ligne ou la colonne qui n'a pas été utilisée ce qui nous ramène au cas 2×2 .

$$\begin{vmatrix} \alpha + \lambda \beta & \beta \\ \gamma + \lambda \delta & \delta \end{vmatrix} = \alpha \delta + \cancel{\lambda \beta \delta} - \beta \gamma - \cancel{\lambda \beta \delta} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Exemples

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{dév } C_1} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\det I_3 \quad L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\downarrow} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Dét}/L_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 6 & 26 & 17 \\ 14 & 53 & 60 \end{vmatrix} = 2 \times 26 \times 60 + 10 \times 17 \times 14 \dots \quad \times$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 3 & 26 & 17 \\ 7 & 53 & 60 \end{vmatrix}$$

on extrait le facteur 2 de C_1

on commence à échanger en colonnes

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 8 \\ 7 & -17 & 39 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 10C_1$
 $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$

$C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$

$$= 2 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -17 & 39 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -17 & 5 \end{vmatrix} = -40$$

dét/ L_1

on extrait α de L_1

$$(c) \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \beta \gamma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \alpha \beta \gamma$$

matrice diagonale

on extrait β de L_2 et γ de L_3

$$\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \lambda \\ 0 & \beta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta & \varepsilon \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha(\beta\gamma - 0\varepsilon) = \alpha\beta\gamma$$

dét/ C_1

matrice triangulaire supérieure

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \delta & \beta & 0 \\ \lambda & \varepsilon & \nu \end{vmatrix} \stackrel{\text{dev } C_3}{=} \gamma \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \delta & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

matrice triangulaire
inférieure

(d) Pour toute $A \in M_3(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on

$$\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_{1,1} & \lambda\alpha_{1,2} & \lambda\alpha_{1,3} \\ \lambda\alpha_{2,1} & \lambda\alpha_{2,2} & \lambda\alpha_{2,3} \\ \lambda\alpha_{3,1} & \lambda\alpha_{3,2} & \lambda\alpha_{3,3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}$$

on extrait λ
trois fois de suite

(e) Les propriétés du det permettent de suivre son évolution lors d'une suite d'opérations élémentaires (par exemple un échelonnement):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

A
 $\det A = 8$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det = -8$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det = -8$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

$$L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B

$$\det B = -1/20 \cdot 8$$

En particulier, on a:

$$\underbrace{\det A \neq 0}_{\text{d\u00e9terminant initial}} \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\det B \neq 0}_{\text{d\u00e9terminant final}}$$

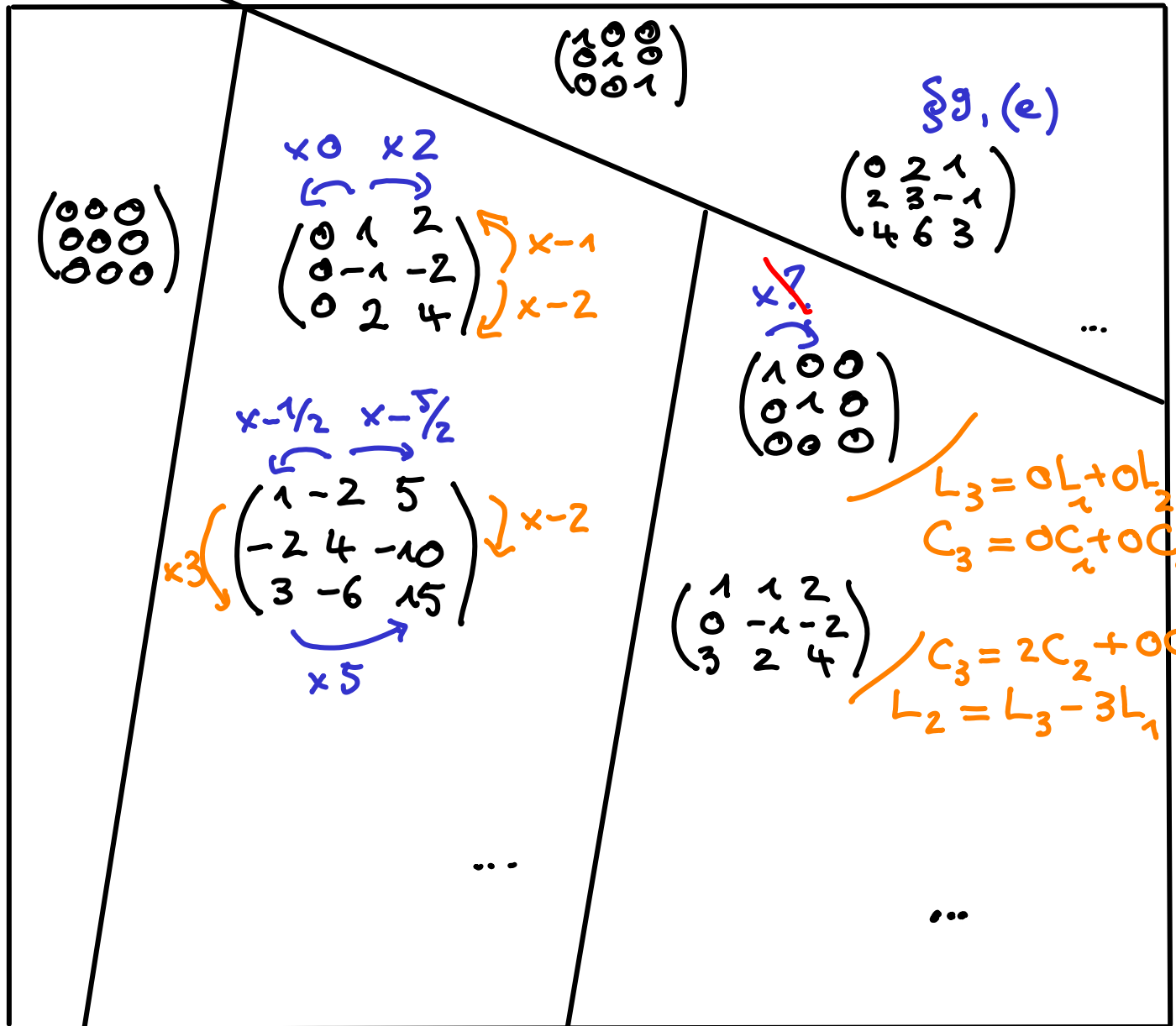
Calcul matriciel (partie 4)

§10. Rang (3x3)

On attribue à $A \in M_3(\mathbb{R})$ son **rang** de la manière suivante:

$$\text{def } A \neq 0$$

$$\text{rg } A = 3$$



$$\text{rg } A = 0$$

$$\text{rg } A = 1$$

$$\text{rg } A = 2$$

Relations de prop.
entre les 3 lignes
/ 3 colonnes $2-2-2$
 $2-2-2$

Il existe 2 lignes/colonnes
non proportionnelles et
la 3ème en est combinaison
linéaire

C'est aussi le nombre de pivots quand on échelonne A en lignes :

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \circ & * & * \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \circ & \circ & * \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \circ & * & * \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ \circ & \circ & * \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \circ & * & * \\ \circ & \circ & * \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ \circ & * & * \\ \circ & \circ & * \end{pmatrix}$$

De même quand on échelonne en colonnes

Proposition On a :

$$\underbrace{\text{rg}(A) \leq 2}_{\det A = 0} \iff (\text{Au moins}) \text{ l'une des lignes est combinaison des 2 autres}$$

$$\iff (\text{Au moins}) \text{ l'une des colonnes est combinaison des 2 autres}$$

Preuve - On travaille sur les lignes, le résultat sur les colonnes se montre de même.

$\Rightarrow$ Si A est nulle le résultat est clair.
 Sinon, supposons pour fixer les idées que $\alpha_{1,1} \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{1,1}} L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\alpha_{3,1}}{\alpha_{1,1}} L_1$ (qui ne modifient pas le déterminant) mènent à la matrice:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & \boxed{A'} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$\leftarrow L_1$
 $\leftarrow L'_2$
 $\leftarrow L'_3$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha_{1,1} \det A' = \det A = 0}$

Comme $\det A' = 0$, les lignes L'_2 et L'_3 sont proportionnelles. Disons par exemple que $L'_3 = \lambda L'_2$. On a alors:

$$\underbrace{L_3 - \frac{\alpha_{3,1}}{\alpha_{1,1}} L_1}_{L'_3} = \lambda \underbrace{\left(L_2 - \frac{\alpha_{2,1}}{\alpha_{1,1}} L_1 \right)}_{L'_2}$$

$$\Rightarrow L_3 = \lambda L_2 + \underbrace{\frac{\alpha_{3,1} - \lambda \alpha_{2,1}}{\alpha_{1,1}} L_1}_{L_3 \text{ est combinaison de } L_1 \text{ et } L_2}$$

$\Leftarrow$ Supposons pour fixer les idées que $L_1 = \lambda L_2 + \mu L_3$. On a alors:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = 0$$

$\uparrow$
 $L_1 \leftarrow L_1 - \lambda L_2$
 $L_1 \leftarrow L_1 - \mu L_3$



Exemples

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$ est de rang 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ -2 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

Annotations: $\times 5$, $\times -2$, $(1 \ -2 \ 5)$, $-2(1 \ -2 \ 5)$, $3(1 \ -2 \ 5)$

Factored form: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} 5 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les lignes de A ne sont pas 2-à-2 proportionnelles: $\text{rg} A \geq 2$
Calculons alors :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times 2/3} = 0$$

On voit donc que $\text{rg} A = 2$. En revenant aux opérations élémentaires utilisées, on obtient :

$$\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Annotations: $(-1 \ 5 \ 3) + (1 \ 4 \ 3)$, $(-1 \ 2 \ 1) + (1 \ 4 \ 3)$

$$\frac{2}{3}(-1 \ 5 \ 3) + \frac{2}{3}(1 \ 4 \ 3) = (-1 \ 2 \ 1) + (1 \ 4 \ 3)$$

$$(-1 \ 2 \ 1) = \frac{2}{3}(-1 \ 5 \ 3) - \frac{1}{3}(1 \ 4 \ 3)$$

$$(1 \ 4 \ 3) = 2(-1 \ 5 \ 3) - 3(-1 \ 2 \ 1) \dots$$

Ce genre de relations permet d'écrire des décompositions colonne-ligne minuscules pour A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on ne peut pas faire mieux

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 2L_2 - 3L_3 \\ -1 & 5 & 3 & L_2 \\ -1 & 2 & 1 & L_3 \end{array} \right)$$

Un travail similaire peut être effectué en colonnes. Par exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3}} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\swarrow$
 $\times -2$

La relation de proportionnalité qui vient d'apparaître montre que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-2C₂+3C₃ C₂ C₃

décomposition minimale

Rappelons que ce genre de décomposition reflète la structure des systèmes de matrice A :

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = \dots \\ -x + 5y + 3z = \dots \\ -x + 2y + z = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 2(-x + 5y + 3z) - 3(-x + 2y + z) = \dots \\ 1(-x + 5y + 3z) + 0(-x + 2y + z) = \dots \\ 0(-x + 5y + 3z) + 1(-x + 2y + z) = \dots \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. On a vu au §9 (e)

que $\det A = -20 \neq 0$. A est donc de rang 3 : on ne peut pas trouver une ligne (ou une colonne) combinaison linéaire des 2 autres.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \dots \end{aligned}$$

décomposition de longueur 3

Voyons que l'on ne peut produire de décomposition plus courtes. Supposons en effet :

$$A = C_1 \underbrace{L_1}_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}} + C_2 \underbrace{L_2}_{\begin{pmatrix} \delta \\ \epsilon \\ \lambda \end{pmatrix}}$$

(Exo : si on a cette écriture, $\det A = 0$)

Calcul matriciel (partie 5)

(c) (suite) $A = \underbrace{C_1}_{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}} L_1 + \underbrace{C_2}_{\begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ \lambda \end{pmatrix}} L_2$

Il est clair que $C_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: sinon $A = C_2 L_2$ serait de rang ≤ 1 . Supposons que $\alpha \neq 0$ pour fixer les idées. On a alors :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \alpha L_1 + \delta L_2 \\ \beta L_1 + \varepsilon L_2 \\ \gamma L_1 + \lambda L_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha L_1 + \delta L_2 \\ (\varepsilon - \frac{\beta\delta}{\alpha}) L_2 \\ (\lambda - \frac{\gamma\delta}{\alpha}) L_2 \end{pmatrix} = 0$$

$\begin{matrix} \nearrow \\ \nwarrow \end{matrix}$
 $\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\beta}{\alpha} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\gamma}{\alpha} L_1 \end{matrix}$
 $\nwarrow$ proportionnels

On $\det A \neq 0$. Les décompositions colonne-ligne minimales sont dans ce cas de longueur 3.

§11. Rang (résumé)
 À toute matrice $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ on a attribué son rang :

$$\text{rg } A \leq \min(m, p)$$

Il est égal :

► Au nombre de pivots quand on échelonne A en lignes ou en colonnes.

- Au nombre minimal de termes dans une décomposition colonne-ligne de A , c'est-à-dire une expression du type:

$$A = \underbrace{C_1}_{M_{m,1}(\mathbb{R})} \underbrace{L_1}_{M_{1,p}(\mathbb{R})} + C_2 L_2 + \dots + C_k L_k$$

- À la taille maximale d'un déterminant extrait de A non nul.

§12. Inversion (3×3)

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. $\det A \neq 0$

Proposition Si $\text{rg} A = 3$, alors il existe une unique matrice $A^{-1} \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_3$$

On l'appelle l'**inverse** de A

Preuve. La présence de 3 pivots permet, par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, d'obtenir:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

forme échelonnée réduite en lignes

Autrement dit, on peut trouver des matrices élémentaires telles que :

$$E_k \dots E_2 E_1 A = I_3$$

Pasons alors :

$$B = E_k \dots E_2 E_1$$

I_3 à laquelle on applique la même suite d'opérations

si bien que $BA = I_3$. Le même travail en colonnes permet de trouver une matrice C telle que $AC = I_3$. On a alors :

$$B = B(\underbrace{AC}_{I_3}) = (\underbrace{BA}_{I_3})C = C$$

La matrice $A^{-1} = B = C$ est bien inverse de A :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$$

Le même argument que ci-dessus permet de voir qu'elle est unique. En effet, si $(A^{-1})'$ était un "autre inverse", alors

$$(A^{-1})' = (A^{-1})'(\underbrace{AA^{-1}}_{I_3}) = (\underbrace{(A^{-1})'A}_{I_3})A^{-1} = A^{-1}$$

□

Proposition Si $\text{rg} A = 3$ alors tout système de matrice A possède une unique solution.

$$\underline{A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = a \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = b \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{cases}$$

Preuve. Il suffit de multiplier à gauche par A^{-1} . $\square$

Une formule explicite pour A^{-1} (analogue au cas 2×2) existe : c'est la formule de Cramer [Série 3, Exercice 7].

Si $\text{rg} A \leq 2$ alors le système homogène :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x C_1 + y C_2 + z C_3$$

possède des solutions non nulles (car l'une des colonnes s'exprime en fonction des deux autres). Ceci empêche A d'avoir un inverse : on dit que A est **non inversible**.

Exemples

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

$$\det A = -2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Cherchons A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_1 A$

$$\downarrow L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$E_2 E_1 A$

$$\downarrow L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$E_3 E_2 E_1 A$

$$\downarrow L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E_1

$$\downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_2 E_1$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_3 E_2 E_1$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_4 E_3 E_2 E_1 A} = I_3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_4 E_3 E_2 E_1}$$

Par conséquent :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On aurait aussi pu inverser le système 3×3 général de matrice A :

$$\underbrace{\begin{cases} 3z = a \\ 2x = b \\ y = c \end{cases}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} x = 1/2 b \\ y = c \\ z = 1/3 a \end{cases}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3.

$$\det A = -1 \cdot 2 \cdot 1 = -2 \neq 0$$

Réolvons le système 3×3 général de matrice A :

$$\begin{cases} -x + 3y + z = a \\ 2y + 5z = b \\ z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -a + 3/2 b - 13/2 c \\ y = 1/2 b - 5/2 c \\ z = c \end{cases}$$

On trouve donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -13/2 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On aurait aussi pu travailler sur les colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A E_1 E_2$

$$\begin{cases} C_1 \leftarrow -C_1 \\ C_2 \leftarrow 1/2 C_2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A E_1 E_2 E_3 E_4$

$$C_3 \leftarrow C_3 - 5C_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$A E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1 E_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1 E_2 E_3 E_4$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 & -13/2 \\ 0 & 1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E_1 E_2 E_3 E_4 E_5$

(c) D'après le travail effectué ci-dessus, on voit que toute matrice inversible $A \in M_3(\mathbb{R})$ est un produit de matrices élémentaires :

$$A = E_1 E_2 \dots E_k$$