ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

MAN, Printemps 2025

Enseignant: S. Friedli, CMS

Leçon 1 : Calcul matriciel. Opérations élémentaires. Échelonnement . . . 1
Leçon 2 : Rang (2×2) et déterminant (2×3) . . . 8
Leçon 3 : Interprétation géométrique du déterminant. Déterminant (3×3) . . . 16
Leçon 4 : Rang (3×3) . . . 23
Leçon 5 : Inverse (3×3) . . . 30
Leçon 6 : Structures vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, bases . . . 38
Leçon 7 : Changement de base, droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$ . . . 45
Leçon 8 : Équations de droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ . . . 53
Leçon 9 : Intersections de plans, bases de $\mathbb{R}^3$ . . . 60
Leçon 10 : Aire orientée et droites affines de $\mathbb{R}^2$ . . . 68
Leçon 11 : Plans et droites affines de $\mathbb{R}^3$ . . . 74
Leçon 12 : Applications linéaires, ensemble image . . . 81
Leçon 13 : Noyau, théorème du rang, décompositions minimales . . . 89
Leçon 14 : Applications inversibles, ensemble des antécédents . . . 96
Leçon 15 : Structure vectorielle sur les applications, composition . . . 103
Leçon 16 : Projections . . . 110
Leçon 17 : Projections (fin), Symétries . . . 118
Leçon 18 : Rotations, réflexions . . . 126
Leçon 19 : Boules, rebonds, changement de base et applications linéaires . . . 134
Leçon 20 : Changement de base, invariants . . . 141
Leçon 21 : Changement de base, représentants simples . . . 148
Leçon 22 : Réduction des applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ . . . 154
Leçon 23 : Réduction des applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (suite) . . . 161
Leçon 24 : Réduction des applications $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (fin), applications . . . 169
Leçon 25 : Réduction, applications (suite), suites linéaires . . . 177
Leçon 26 : Ensemble des représentants . . . 184

Algèbre linéaire et géométrie (MAN 2025)

Groupe 2 : | IN + SC → BCH 2201 (ici), rangs impairs !
| MA + EL → BS160

1. Calcul matriciel

Déf: $M_{n,p}(\mathbb{R}) = \{$ matrices $\underset{\text{nb lignes}}{n} \times \underset{\text{nb. colonnes}}{p}$ à coeffs. réels $\}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{np} \end{pmatrix} = [\alpha_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$$

Ex: $n = 1$: "matrice ligne"
$p = 1$: "matrice colonne"
$p = n$: matrice carrées.

Matrices nulles : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

Matrices identités : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

$$I_n = [\delta_{ij}]_{1 \le i,j \le n} \qquad \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \ne j \end{cases}$$

Opérations matricielles

Addition : $\underset{\in M_{n,p}(\mathbb{R})}{A + B} \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+6 \\ 3+7 & 4+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$

Multiplication scalaire: $\lambda A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in M_{n,p}$

Ex: $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

Produit matriciel : $A \cdot B \in M_{n,r}(\mathbb{R})$

$\underbrace{n \times p \qquad p \times r}_{n \times r}$

Ex: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 2 & 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 0 + 4\cdot 2 & 3\cdot(-1) + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$

2×2 "ok" 2×2

2) $(2 \quad -3)\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 7 + (-3)\cdot 1 = \underbrace{11}_{\text{"}1\times 1\text{"}}$

$1 \times 2 \qquad 2 \times 1$

3) $(2 \quad -3)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (2\cdot 0 + (-3)\cdot 2 \quad 2(-1) + (-3)\cdot 1)$

$= \underset{1 \times 2}{(-6 \quad -5)}$

$1 \times 2 \qquad 2 \times 2$

4) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$-3C$, $4C$, $2L$, $-L$

2×1 $\quad$ 1×2 $\qquad$ 2×2

Propriétés :

$A + B = B + A$ (commutativité)

$A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité)

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (distributivité)

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Exercice !

Remarques: 1) $A \cdot B \neq B \cdot A$ (en général)

Ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

(Par conséquent : $\underbrace{(A - B)(A + B)}_{\neq A^2 - B^2 \text{ (en général)}} = A^2 + \overbrace{A \cdot B - B \cdot A}^{\neq 0} - B^2$)

40 min.

Si $A \cdot B = B \cdot A$, on dit qu'elles commutent

2) $A = 0$, $B = 0$ $\Longrightarrow$ $A \cdot B = 0$

$\cancel{\Longleftarrow}$

Ex : $\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Opérations élémentaires

$A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

C_i : i-ème colonne de A $\quad A = (C_1 \cdots C_p)$

L_j : j-ème ligne de A $\quad A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$

Sur les lignes:

$$\left.\begin{array}{l} L_i \leftrightarrow L_j \quad (j \neq i) \\ L_i \leftarrow \lambda L_i \quad (\lambda \neq 0) \\ L_i \leftarrow L_i + \mu L_j \quad (j \neq i, \mu \in \mathbb{R}) \end{array}\right\}$$

- ne changent pas l'ens. solution de $A\vec{x} = \vec{b}$
- sont "inversibles"

Sur les colonnes:

$$C_i \leftrightarrow C_j$$
$$C_i \leftarrow \lambda C_i$$
$$C_i \leftarrow C_i + \mu C_j$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{C_1 \leftarrow 3C_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$

Ces 6 opérations élémentaires peuvent être effectuées à l'aide de produits matriciels (!)

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Pour effectuer une opération élémentaire E sur les lignes de A :
  1) Effectuer E sur I_n $\longrightarrow E \in M_{n,n}(\mathbb{R})$
  2) Multiplier A par E (à gauche):

$$\underbrace{E \cdot A}_{} \in M_{n,p}$$

↖ A après avoir effectué $\mathcal{E}$.

- Pour effectuer " " " $\mathcal{E}$ sur les colonnes de A:

  1) Effectuer $\mathcal{E}$ sur I_p $\longrightarrow$ $E \in M_{p,p}(\mathbb{R})$

  2) Multiplier A par E (à droite):

$$\underbrace{A \cdot E}_{} \in M_{n,p}$$

↖ A après avoir effectué $\mathcal{E}$

Ex (d'avant) : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

a) $L_1 \leftrightarrow L_2$: 1) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{E} =$ "$L_1 \leftrightarrow L_2$"

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $E \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{"OK"}$$

b) $C_1 \leftarrow 3C_1$: 1) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathcal{E} =$ "$C_1 \leftarrow 3C_1$"

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{"ok"}$$

(**Question:** La transposition $A \in M_{n,p} \longrightarrow A^T \in M_{p,n}$ peut-elle être effectuée à l'aide d'un produit matriciel ?

Rappel: $(A^T)_{ij} := A_{ji}$)

Rappel: Les opérations élémentaires sont à la base de la méthode de Gauss pour résoudre des systèmes linéaires: l'échelonnement

Echelonnement en ligne:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

$$\Big\downarrow \; L_1 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \cdot A \quad , \text{ où } E_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; L_2 \leftarrow L_2 - 3 L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} = E_2 \cdot E_1 \cdot A \quad , \text{ où } E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

↖ une version échelonnée en ligne de A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \begin{cases} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1 \end{cases}$$

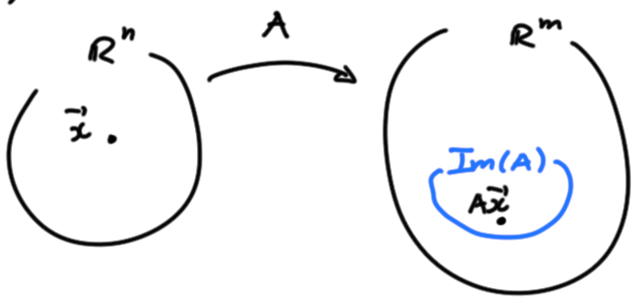
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = A \cdot E_1 \cdot E_2 \quad , \quad \text{où} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Big\downarrow \; C_3 \leftarrow C_3 - 9C_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 , \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

une version échelonné en colonnes de A.

Rang (2×2)



$\mathrm{rg}(A) := \dim(\mathrm{Im}(A))$

Déf: Si $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, on définit son rang, $\mathrm{rg}(A) \in \{0,1,2\}$ ainsi

- si $A = 0$, $\mathrm{rg}(A) := 0$
- si $A \neq 0$, et si ses colonnes\lignes sont proportionnelles, $\mathrm{rg}(A) := 1$

  et si " " ne sont pas " , $\mathrm{rg}(A) := 2$.

Rem: $\mathrm{rg}(A)$ est aussi le nombre de pivots $(\neq 0)$ obtenus dans un

échelonnement en colonnes / lignes de A. En ligne:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & \cdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} * & \cdots \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(A) = 0 \qquad \mathrm{rg}(A) = 1 \qquad \mathrm{rg}(A) = 1 \qquad \mathrm{rg}(A) = 2$$

Ex: 1)
$$A = \begin{array}{cc} & \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} & \end{array}$$

$C_1 \xrightarrow{\cdot 2} C_2$

Comme $C_2 = 2C_1$ (ou $L_2 = \frac{3}{2}L_1$), $\mathrm{rg}(A) = 1$.

On peut écrire :

- $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

On a alors

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\underbrace{(1\ 2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{=x+2y\in\mathbb{R}} = (x+2y)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

On "voit" $rg(A)=1$ et $Im(A) = Vect\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$

- $A = \begin{pmatrix}1\\3/2\end{pmatrix}(2\ 4) = \begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 6\end{pmatrix}$

sont des <u>décompositions "colonne-ligne" minimales.</u>

On peut toujours écrire une décomp. "col.-ligne" <u>pas minimale</u> :

$$A = \begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\3 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 4\\0 & 6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}(1\ 0) + \underbrace{\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}}_{2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}(0\ 1)$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\underbrace{\left[(1\ 0) + 2(0\ 1)\right]}_{(1\ 2)}$$

2) $A = \begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{pmatrix}$ pas de proportionnalité $\rightarrow$ $rg(A) = 2$

<u>Rem</u> : après "$L_2 - \frac{3}{2}L_1$", $\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & -1\end{pmatrix}$

Décompositions col.-ligne minimales : (il en existe une ∞-té !)

- $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}(1 \ 0) + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}(0 \ 1)$, ou

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(2 \ 4) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(3 \ 5)$, etc...

2 termes dans les décomp. minim., et on ne peut pas faire mieux !

Déterminant (2x2)

↑ **but:** caractériser la (non-) proportionnalité des lignes / colonnes

Déf: Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, sont **déterminant** est

$$\det(A) := ad - bc$$

↑ parfois : $|A|$

Proposition (1): Si $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, alors

$$\det(A) = 0 \iff rg(A) \leq 1$$

$$\det(A) \neq 0 \iff rg(A) = 2$$

Preuve:
- Si $A = 0$, rien à démontrer.
- Si $A \neq 0$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}$, supposons que $a \neq 0$.

On a:

$rg(A) = 1 \iff$ lignes proportionnelles : $L_2 = \lambda L_1$, où $\lambda = \frac{c}{a}$

Donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{c}{a}b \end{pmatrix}$, qui donne :

$\det(A) = a \cdot \frac{c}{a}b - c \cdot b = bc - bc = 0$ $\square$

Proposition ② : Si $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(Preuve en exercice)

Proposition ③ : Soit $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si $\det(A) \neq 0$ ($\mathrm{rg}(A) = 2$), alors la matrice

$$B := \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

satisfait :
$$\left.\begin{aligned} AB &= I_2 \\ BA &= I_2 \end{aligned}\right\} (*)$$

B est appelée <u>l'inverse de A</u>, notée A^{-1}

Preuve : Effectivement,

$$\cdot\; AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ad - bc & \underbrace{\cancel{-ab + ba}}_{0} \\ \underbrace{\cancel{cd - dc}}_{0} & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\cdot\; BA = \cdots \qquad \cdots = I_2$$

$\square$

Rem : 1) Si $\det(A) = 0$, alors A n'a pas d'inverse. En effet, s'il existait une B t.q.

$$AB = I_2 \,, \quad \text{alors}$$

$$\underbrace{\det(AB)}_{\underbrace{\det(A)}_{=0}\det(B)} = \det(I_2) = 1 \implies \text{contradiction.}$$

Donc : A inversible $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

2) L'inverse est-il unique ? Oui ! En effet, supposons que $\det(A) \neq 0$, et qu'il existe deux inverses, B et B'. On a :

$$B' = B' \cdot I_2 \underset{\text{B est inverse de A}}{=} B' \cdot (A \cdot B) = \underbrace{(B' \cdot A)}_{= I_2 \text{ car B' inv. de A}} \cdot B = I_2 \cdot B = B$$

Ex : 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -2 \neq 0$ $\rightarrow$ A inversible, et

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Rem : Étudions un système linéaire : $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} 2x + 4y = \alpha \\ 3x + 5y = \beta \end{cases}$$

$\leftarrow$ Possède une unique solution (x,y), quel que soient α, β.

$$\Updownarrow$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

donc
$$\begin{cases} x = -\frac{5}{2}\alpha + 2\beta \\ y = \frac{3}{2}\alpha - \beta \end{cases}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A) = 0 \longrightarrow A$ pas inversible

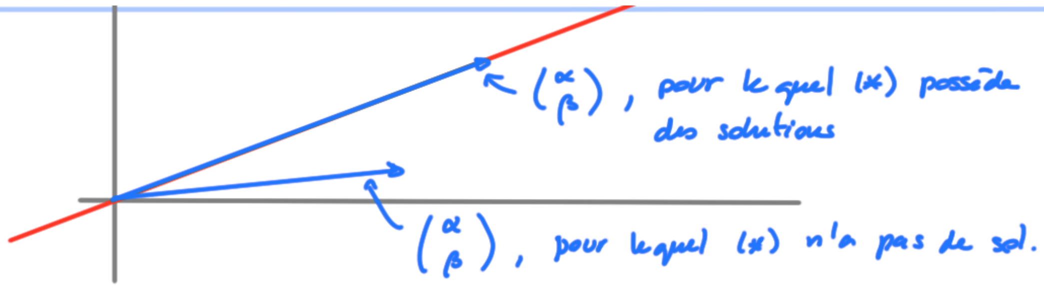
Ici, le système $\begin{cases} 2x + 4y = \alpha \\ 3x + 6y = \beta \end{cases} \longleftarrow$ Possède parfois des sol. (x, y), parfois pas (dépend de (α, β)) !

si $\beta = \frac{3}{2}\alpha$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$(*) \left\{ (x + 2y) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right. \longrightarrow$ possède des solutions si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est proportionnel à $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$



C'est ce qui se passe lorsque $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

si $\beta = 3/2\,\alpha$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est sol. de $(*)$ si

$$x + 2y = \frac{\alpha}{2} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\alpha}{2} - 2y$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha/2 - 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha/2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rang (2x3)

Déf: Si $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, on définit $rg(A) \in \{0,1,2\}$, ainsi :

- Si $A = 0$, $rg(A) := 0$
- Si $A \neq 0$, si les colonnes de A sont 2 à 2 proportionnelles, (ou si les lignes sont proportionnelles)
$$rg(A) := 1$$
- Si $A \neq 0$, et si il n'existe pas de proportionnalité 2 à 2,
$$rg(A) := 2.$$

Rem: 1) Si les colonnes sont 2 à 2 proportionnelles : ....

$$\begin{pmatrix} a & \lambda a & \mu a \\ b & \lambda b & \mu b \end{pmatrix} \cdot \frac{b}{a}$$

... alors les lignes sont proportionnelles

2) $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \leq 1$ si et seulement si

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} = 0$$

Ex: 1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1/3 \\ 3 & -12 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow rg(A) = 1$

$$-\tfrac{1}{4}C \longleftarrow C \longrightarrow -\tfrac{1}{12}C$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$ ← décomposition "col.-ligne" minimale de A

(écrivez-en d'autres)

$$\to \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(-\frac{x}{4} + y - \frac{1}{12}z\right) \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

À propos du sens géométrique du déterminant

(Cas 2x2)

Rappelons que si $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $A \neq 0$, $\underbrace{rg(A) = 2 \Longleftrightarrow det(A) \neq 0}_{\text{sens géométrique ?}}$

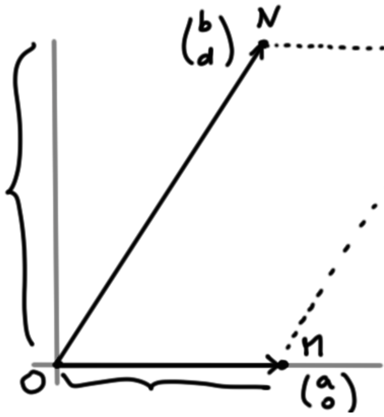
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

C_1 C_2

Cas particulier: $c = 0$

$$\text{aire}(OMPN) = \underset{\text{base}}{a} \cdot \underset{\text{hauteur}}{d} \text{ " } - 0 \cdot b \text{ "}$$

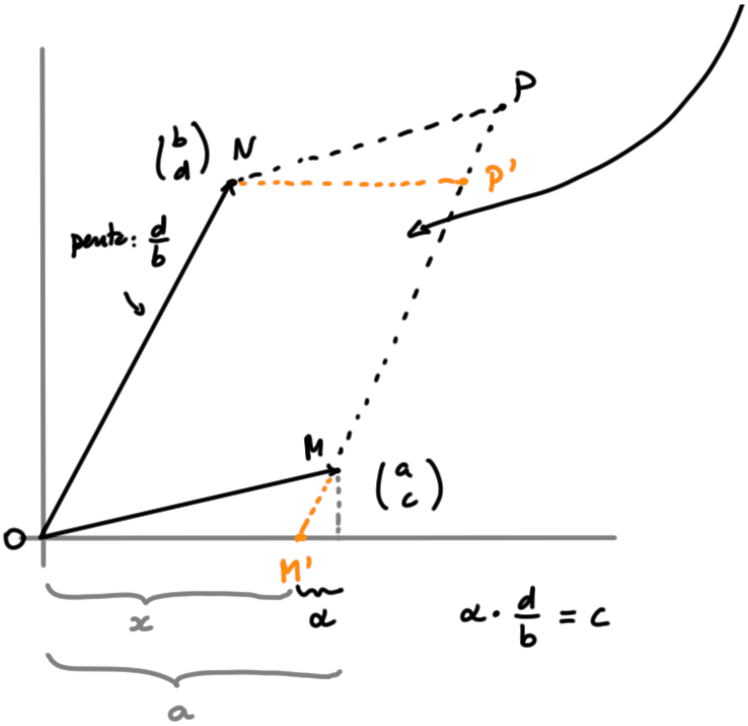
$$= det(A)$$



Comme $rg(A) = 2$, ce parallélogramme est "plein" ("pas applati")

Cas général: $c \neq 0$

$$\text{aire}(OMPN) = \text{aire}(OM'P'N)$$
$$= x \cdot d$$
$$= \Big(a - \underbrace{\tfrac{b}{d} \cdot c}_{\alpha}\Big) \cdot d$$
$$= ad - bc$$
$$= det(A)$$



$$\alpha \cdot \frac{d}{b} = c$$

Rang (3x2) $\rightarrow$ pareil ! $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

Def: Si $A = 0$, $rg(A) := 0$

$A \neq 0$, et si les colonnes sont proportionnelles (ou si les lignes sont 2 à 2 prop.), alors

$rg(A) := 1$

et si les colonnes ne sont pas proport.

$rg(A) := 2$

Déterminant (3x3).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

Déf: Le déterminant de A est le réel $\det(A) \in \mathbb{R}$ (ou "$|A|$") défini par :

$$\det(A) := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Remarques:

1) On peut écrire :

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$
$$+ a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12})$$
$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{+\begin{pmatrix} a_{11} & \text{—} \\ | & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} | & \boxed{\cdot \quad \cdot} \\ a_{21} & \text{—} \\ | & \boxed{\cdot \quad \cdot} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} | & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} \\ a_{31} & \text{—} \end{pmatrix}}_{\text{développement de det(A) selon 1ère colonne}}$$

2) On peut aussi écrire, en réarrangeant :

$$\det(A) = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

développement de det(A) selon 2ème ligne

3)
4)
5)
6)
} pareil ! Attention aux signes : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Donc det(A) peut se calculer de 6 façons différentes

<u>Autres propriétés</u> :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- <u>Échange de colonnes / lignes</u>

$$\boxed{\text{Si } A \xrightarrow[\substack{C_i \leftrightarrow C_j \\ \text{ou} \\ L_i \leftrightarrow L_j}]{} A' \ (i \neq j), \text{ alors } \det(A') = -\det(A)}$$

Preuve: P. ex. $A \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\rightsquigarrow} A'$. On calcule

$$\det(A') = \det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

selon 3ème colonne

$$= +a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}}_{\substack{a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32} \\ \| \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}} - a_{23} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}}_{\substack{\| \\ -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}} + a_{33} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}}_{\substack{\| \\ -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}}$$

$$= -\underbrace{\left[+a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \cdots \right]}_{\text{dév. de } \det(A) \text{ selon 3ème colonne}}$$

$$= -\det(A)$$

48min ↓

Multiplier une colonne/ligne par un $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{Si } A \underset{\substack{C_i \leftarrow \lambda C_i \\ \text{ou} \\ L_i \leftarrow \lambda L_i}}{\rightsquigarrow} A', \text{ alors } \det(A') = \lambda \det(A)}$$

Preuve: P. ex, $A \underset{C_3 \leftarrow \lambda C_3}{\rightsquigarrow} A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \det(A') \overset{\text{selon 3e col.}}{=} \lambda a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \lambda a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + \lambda a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \Big[\underbrace{a_{13} \cdots \quad - a_{23} \quad + a_{33}}_{\det(A) \text{ (selon } 3^{\text{ème}} \text{ colonne)}} \Big]$$

$\square$

- <u>Rajouter un mult. d'une ligne/colonne à une autre ligne/colonne</u>

$$\boxed{\text{Si } A \underset{\substack{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \\ \text{ou} \\ C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j}}{\rightsquigarrow} A', \text{ alors } \det(A') = \det(A)}$$

<u>Preuve</u>: P. ex. $A \underset{C_1 \leftarrow C_1 + \lambda C_2}{\rightsquigarrow} A' = \begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$\det(A') =$ ↘ selon $3^{\text{ème}}$ col.

$$= a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ a_{21}a_{32} + \cancel{\lambda a_{22} a_{32}} \\ - a_{31}a_{22} - \cancel{\lambda a_{32} a_{22}}}} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{12} \\ \quad \cdots \end{vmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$= \underbrace{a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \cdots \cdots}_{\text{dév. de } \det(A) \text{ selon } 3^{\text{e}} \text{ col.}}$$

$= \det(A)$.

On utilise ces propriétés pour simplifier le calcul d'un déterminant...

Ex:

1) $$|I_3| = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} \underset{\text{selon } 1^{\text{ère}} \text{ ligne}}{=} +1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}}_{1\cdot 1-0\cdot 0} - 0\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}$$

$$= 1.$$

2) $$\underbrace{\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}}_{A'} = -\underbrace{\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}}_{A = I_3} = -1$$

$$A' \xleftarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} A = I_3$$

3) $$\begin{vmatrix}\alpha&0&0\\0&\beta&0\\0&0&\gamma\end{vmatrix} \underset{1^{\text{ère}} \text{ colonne}}{=} \alpha \begin{vmatrix}\beta&0\\0&\gamma\end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

$$\begin{vmatrix}\alpha&\delta&\mu\\0&\beta&\nu\\0&0&\gamma\end{vmatrix} \underset{1^{\text{ère}} \text{ col.}}{=} \alpha \begin{vmatrix}\beta&\nu\\0&\gamma\end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma$$

4) $$\underbrace{\begin{vmatrix}2&10&3\\6&26&17\\14&53&60\end{vmatrix}}_{A'} \underset{\text{extraire } \lambda=2 \text{ dans } 1^{\text{ère}} \text{ col.}}{=} 2\underbrace{\begin{vmatrix}1&10&3\\3&26&17\\7&53&60\end{vmatrix}}_{A} = 2\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-4&8\\7&-17&39\end{vmatrix}$$

"pivot"

$C_2 \leftarrow C_2 - 10C_1$
$C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$

selon $1^{\text{ère}}$ ligne

$$= 2\begin{vmatrix}-4&8\\-17&39\end{vmatrix}$$

extraire $\lambda = -4$ de $1^{\text{ère}}$ ligne

$$= -8\begin{vmatrix}1&-2\\-17&39\end{vmatrix}$$

$$= (-8)(39-34) = \underline{\underline{-40}}$$

5)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) = \underline{\underline{4}}$$

extraire $\lambda = 2$ de $1^{\text{ère}}$ col.

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

extraire $\lambda = 2$

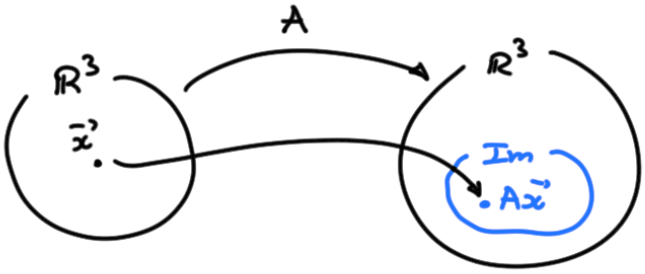
de $2^{\text{è}}$ col.

$$= (-2)\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

extraire $\lambda = -1$ de $3^{\text{è}}$ col.

$$= (-2)\cdot 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & +1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

Rang 3×3



Déf: Soit $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. On définit $rg(A) \in \{0,1,2,3\}$, ainsi

- Si $A = 0$, $\quad rg(A) := 0$
- Si $A \neq 0$, et si les colonnes / lignes sont 2 à 2 proportionnelles,

  $rg(A) := 1$
- Si $A \neq 0$, et si 2 colonnes / lignes ne sont <u>pas</u> proport., et la 3ème est combinaison linéaire des deux autres:

  $rg(A) := 2$

- Si $A \neq 0$, et si il est impossible d'exprimer une colonne / ligne comme combin. lin. des 2 autres,

  $rg(A) := 3$

Rappelons que le rang peut se calculer en échelonnant $\underbrace{A}_{\text{en lignes}}$ et en comptant les pivots:

$* \neq 0$

$$\left.\begin{pmatrix} * & - & - \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & - \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow rg(A) = 1$$

$$\left.\begin{pmatrix} * & - & - \\ 0 & * & - \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & - & - \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & * & - \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \Longrightarrow rg(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} * & - & - \\ 0 & * & - \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 3$$

(Même chose si on échelonne en colonnes)

<u>Ex</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$ Comme $C_2 = -2C_1$, $C_3 = 5C_1$,

$\quad\quad\quad C_1 \quad C_2 \quad C_3$

$C_1 \xrightarrow{\cdot(-2)} C_2$, $C_1 \xrightarrow{\cdot 5} C_3$

$rg(A) = 1$

$$A = (C_1 \mid -2C_1 \mid 5C_1)$$

$$\rightarrow A = C_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Donc $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - 2y + 5z) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ou alors:

$$A = \left(\frac{C_2}{-2} \;\middle|\; C_2 \;\middle|\; \frac{5}{-2} C_2 \right)$$

$$= C_2 \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}$$

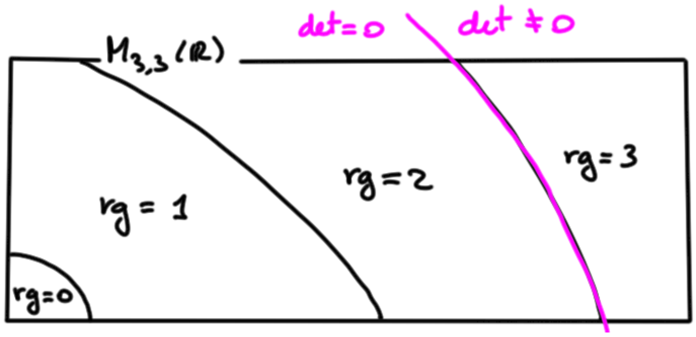
<u>Rem</u>: Une version échelonnée (en ligne) de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rg(A) = 1.$$

Théorème: Soit $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Alors

$$\det(A) = 0 \iff \text{Au moins une colonne/ligne peut s'exprimer comme comb. lin. des deux autres}$$

Donc $\det(A) = 0 \iff rg(A) \leq 2$, et
$\det(A) \neq 0 \iff rg(A) = 3$.



Preuve: $\Rightarrow$. Supposons que $\det(A) = 0$

- Si $A = 0$, rien à démontrer
- Si $A \neq 0$, supposons que $a_{11} \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \\ a_{31} & \cdots \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 =: L_2'$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 =: L_3'$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots \\ 0 & \boxed{B'} \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2' \\ L_3' \end{matrix}$$

On sait que $\det(A) = \det(A') \overset{\text{selon } 1^{\text{ère}} \text{ col.}}{=} a_{11} \cdot \det(B')$

$= 0$ par hyp. $\neq 0$ par hyp.

$\Rightarrow \det(B') = 0$

$\overset{\text{Th.}}{\Longrightarrow}$ Les lignes de B' sont proportionnelles

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\underline{L_3'} = \alpha \underline{L_2'}$

$$\left(L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1\right) = \alpha \left(L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1\right)$$

$\Rightarrow L_3 = \alpha L_2 + \frac{1}{a_{11}}(a_{31} - \alpha a_{21}) L_1$, donc

45min

L_3 est combin. lin. de L_1 et L_2.

$\Leftarrow$: Supposons que $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$, avec $L_1 = \alpha L_2 + \beta L_3$.

On calcule :

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \overset{\text{propr. dét.}}{=} \det\begin{pmatrix} L_1 - \alpha L_2 - \beta L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

dév. selon $1^{\text{ère}}$ ligne

$$= 0$$

$\square$

Ex:

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ rang ? décomp colonne-ligne ?

Calculons $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} L_1 \\ \boxed{\begin{array}{l} L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 + L_1 \end{array}} \end{array}$

selon
1ère col.

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = 0 \quad , \text{ donc } \quad rg(A) \leq 2,$$

c.à.d. $rg(A) \in \{1, 2\}$.

Pas de proportionnalité entre L_1 et L_2, ni L_1 et L_3, ni L_2 et L_3, donc $rg(A) \neq 1$

$\Longrightarrow rg(A) = 2$.

Regardons de plus près : On voit que $L_2' = \frac{3}{2} L_3'$

$$(L_2 + L_1) = \frac{3}{2}(L_3 + L_1)$$

$\rightarrow L_2 = \frac{3}{2} L_3 + \frac{1}{2} L_1$

$\rightarrow L_2$ comb. lin. de L_1 et L_3.

Vérification : $\frac{1}{2} L_1 + \frac{3}{2} L_3 = \frac{1}{2}(1 \;\; 4 \;\; 3) + \frac{3}{2}(-1 \;\; 2 \;\; 1)$

$$= (-1 \;\; 5 \;\; 3) = L_2$$

De plus,

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \frac{1}{2} L_1 + \frac{3}{2} L_3 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} L_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} L_3$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \;\; 4 \;\; 3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 \;\; 2 \;\; 1)}_{\text{une décomp. colonne - ligne}}$$

(il y en a une infinité !)

On aurait aussi pu faire...

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \underbrace{C_1' = C_1 + C_3 \quad C_2' = C_2 - 2C_3}_{C_1' = -2C_2'} & C_3 \end{array} \end{array}$$

$$C_1 + C_3 = -2\left(C_2 - 2C_3\right)$$

$$\Rightarrow C_1 = -2C_2 + 3C_3 \quad , \text{ donc}$$

vérifier !

$$A = \left(-2C_2 + 3C_3 \,\middle|\, C_2 \,\middle|\, C_3\right) = C_2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{une autre décomp...}}$$

2 $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{hier}} \det(A) = 4 \neq 0$, donc $\text{rg}(A) = 3$

Décomp. colonne-ligne ?

P. ex : $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}(1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}(0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}(0\ 0\ 1)$$

une décomp.

Est-on vraiment sûr qu'il est impossible d'écrire A comme

$$A = \tilde{C}_1 \tilde{L}_1 + \tilde{C}_2 \tilde{L}_2 \quad ?$$

Si c'était possible, alors

$$\det(A) = \det\left(\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}}_{\tilde{C}_1} L_1 + \underbrace{\begin{pmatrix}\delta\\\mu\\\nu\end{pmatrix}}_{\tilde{C}_2} L_2\right) = \det\begin{pmatrix}\alpha L_1 + \delta L_2\\ \beta L_1 + \mu L_2\\ \gamma L_1 + \nu L_2\end{pmatrix}$$

Comme $A \neq 0$, au moins un des coeffs $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu$ n'est pas nul. Si c'est α,

$$= \det\begin{pmatrix}\alpha L_1 + \delta L_2\\ 0\cdot L_1 + (\mu - \frac{\beta}{\alpha}\delta) L_2\\ 0\cdot L_1 + (\nu - \frac{\gamma}{\alpha}\delta) L_2\end{pmatrix}$$

↓ -7 min

proportionnelles, donc $\det(A) = 0$, une contrad. puisque $\det(A) = 4 \neq 0$!

À 10h30, en BS270 : avec moi...

Rappels : Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $n, p \in \{1, 2, 3\}$, le rang $rg(A)$ mesure à quel point les lignes / colonnes de A dépendent les unes des autres.

D'un point de vue calculatoire : $rg(A)$ se calcule :

1) en comptant le nombre de pivots dans une échelonnée en lignes (ou colonnes) de A

2) en comptant le nombre de termes dans une décomposition minimale colonne – ligne de A :

$$A = \underbrace{C_1}_{\in M_{n,1}(\mathbb{R})} \underbrace{L_1}_{\in M_{1,p}(\mathbb{R})} + \cdots + C_r L_r \qquad , \; r = rg(A)$$

Proposition Soit $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Les trois conditions sont équivalentes :

a) $rg(A) = 3$ $\iff$ a') $\det(A) \neq 0$

b) Il existe une $B \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ t.q. $AB = I_3$ et $BA = I_3$

(B est appelée l'<u>inverse</u> de A, notée "A^{-1}")

c) $\forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

possède une unique solution.

Rem : 1) Les 3 conditions ci-dessus sont des caractérisations équivalentes de l'<u>inversibilité</u> de A.

2) Dans b) et c), on verra qu'on a aussi des moyens concrets de calculer A^{-1}.

Preuve:

$$\begin{tikzcd} a) \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ c) \arrow[r, Leftrightarrow] & b) \end{tikzcd}$$

<u>a) $\Rightarrow$ b):</u> Si $rg(A) = 3$, on sait qu'il est possible d'échelonner A jusqu'à obtenir 3 pivots.

- En lignes:

$$E_k \cdots E_1 A = \begin{pmatrix} * & - & - \\ 0 & * & - \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \qquad "* \neq 0"$$

$$\underbrace{E_n \cdots E_{k+1} E_k \cdots E_1}_{=:B} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

- En colonnes:

$$A \tilde{E}_1 \cdots \tilde{E}_{\tilde{k}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ - & * & 0 \\ - & - & * \end{pmatrix} \qquad "* \neq 0"$$

$$\underbrace{A \tilde{E}_1 \cdots \tilde{E}_{\tilde{k}} \tilde{E}_{\tilde{k}+1} \cdots \tilde{E}_{\tilde{n}}}_{=:\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Mais $\quad \tilde{B} = I_3 \tilde{B} = (BA)\tilde{B} = B(A\tilde{B}) = B I_3 = B$

$\rightarrow$ B est l'inverse de A.

<u>b) $\Rightarrow$ c):</u> Supposons qu'$\exists\, A^{-1}$: $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$

Fixons $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, étudions

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$A^{-1} \cdot \dots$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

<u>c) $\Rightarrow$ a)</u> : pas très pratique. Considérons sa contraposée : non a) $\Rightarrow$ non c)

non a) : $rg(A) \leq 2$ cas $A=0$: OK.

Cas $A \neq 0$: $\exists$ au moins une colonne qui peut s'écrire comme combin. lin. des autres : il existe donc des α, β t.q., par exemple,

$$C_1 = \alpha C_2 + \beta C_3 \qquad (A = (C_1 | C_2 | C_3))$$

$$\Rightarrow \quad A\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\-\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad C_1 - \alpha C_2 - \beta C_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Mais comme on a aussi $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, on conclut que le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ a au moins 2 solutions. Donc c) n'est pas vrai, ce qui démontre "non c)". $\square$

45min

<u>Ex:</u> I) $A = \begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\2 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix}3 & -2\\-1 & 0\end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow rg(A) = 3$

$\Rightarrow$ A est inversible

A^{-1} ? 3 méthodes...

1) On a vu que $A^{-1} = E_n \cdots E_1$, où les $E_1, \dots, E_n$ sont

des matrices représentant les opérations élémentaires $\underbrace{\text{qui}}_{\text{sur les } \underline{\underline{\text{lignes}}}}$ permettent de réduire A à I_3. Faisons plus simple :

$$\begin{array}{c|c} A & I_3 \\ \downarrow \text{1ère op. élém} & \\ E_1 A & E_1 I_3 \\ \downarrow \text{2ème op. élém.} & \\ \vdots & \\ \underbrace{E_n \dots E_1 A}_{I_3} & \underbrace{E_n \dots E_1 I_3}_{A^{-1}} \end{array}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$, "E_1"

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{E_1 A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_1 I_3}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$, "E_2"

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}}_{E_2 E_1 A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{E_2 E_1 I_3}\right)$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$, "E_3"

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}}_{E_3 E_2 E_1 A} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -6 \end{matrix}}_{E_3 E_2 E_1 I_3}\right)$$

$L_2 \leftarrow -L_2$ "E_4"

$L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3$ "E_5"

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{E_5E_4E_3E_2E_1A \overset{\shortparallel}{} I_3} \qquad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

Vérifions : $AA^{-1} = \dots = I_3$

2) Si on échelonnait A en colonnes ?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad C_2 \leftarrow C_2 + \frac{3}{2}C_3 \quad \text{"}\tilde{E}_1\text{"}$$

$$\underbrace{}_{A} \qquad \underbrace{}_{I_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \quad C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2, \quad \text{"}\tilde{E}_2\text{"}$$

$$\underbrace{}_{A\tilde{E}_1} \qquad \underbrace{}_{I_3\tilde{E}_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \quad C_1 \leftrightarrow C_3 \quad \tilde{E}_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{ll} C_1 \leftarrow -\frac{1}{2}C_1 & \tilde{E}_4 \\ C_2 \leftarrow -C_2 & \tilde{E}_5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -3/2 & 3 \end{array}\right)$$

$$A\tilde{E}_1\tilde{E}_2\tilde{E}_3\tilde{E}_4\tilde{E}_5 = I_3 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1/2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice: Et si $\tilde{E}_k \cdots \tilde{E}_1 A E_1 \cdots E_k = I_3$?

3) On fixe $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ quelconque et on résout $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = a \\ 2x - y = b \\ x = c \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} x = c \\ y = 2x - b = 2c - b = -b + 2c \\ z = \frac{1}{2}(3y - a) = \frac{3}{2}y - \frac{a}{2} = \frac{3}{2}(-b+2c) - \frac{a}{2} \\ \quad = -\frac{a}{2} - \frac{3}{2}b + 3c \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1/2 & -3/2 & 3 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

4) Formule de Cramer : voir Exercices !

II) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix} \cdot 2$ $\longrightarrow$ $rg(A) = 1$, donc A n'est pas inversible.

$\cdot(-2)$

$\cdot 3$

• Système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$(x - 2y + 3z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\longleftarrow$ posséder des solutions seulement si $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont proport.

Donc il y a des choix de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ pour lesquels le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ possède des solutions (une infinité de sol.!), et d'autres pour lesquels ce système ne possède aucune solution.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont proport. si $b = 2a$, $c = -4a$, qui donne :

$$(x - 2y + 3z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$x - 2y + 3z = a$$

$\leftarrow$ c'est un plan dans $\mathbb{R}^3$

$\uparrow$ infinité de choix possibles pour x, y, z.

- Et si on échelonne A ?

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 E_1 A \tilde{E}_1 \tilde{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↖ échelonnement de A en lignes <u>et</u> colonnes.

1. Calcul Matriciel ✓

2. Structures vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis :

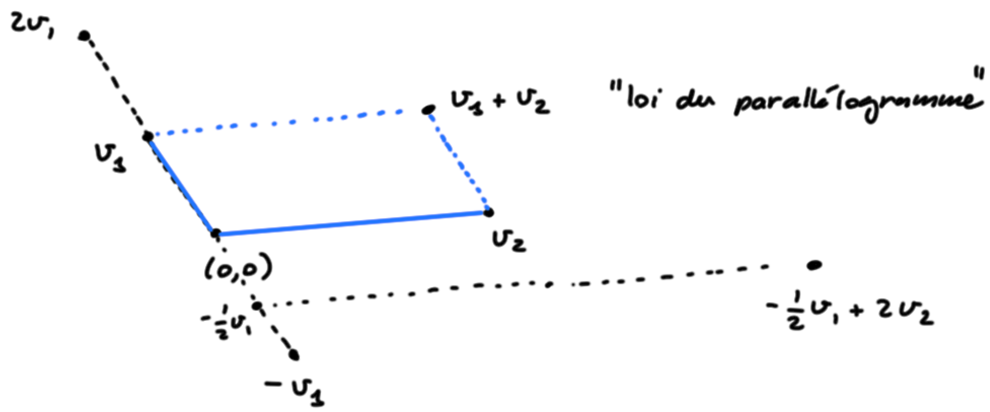
$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \text{une multiplication scalaire} \\ 2)\ \text{une addition} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{combin. linéaires}$$

Ex: $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

Si $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (3,-1)$,

- $2v_1 = (2\cdot 1, 2\cdot 2) = (2,4)$ "homothétie de rapport $\lambda = 2$"
- $-v_1 = (-1,-2)$ " $\lambda = -1$
- $v_1 + v_2 = (1+3, 2-1) = (4,1)$
- $-\frac{1}{2}v_1 + 2v_2 = (-\frac{1}{2}, -1) + (6,-2) = (\frac{11}{2}, -3)$

Si on choisit un repère du plan :



Munis de ces opérations, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des espaces vectoriels.

Considérons certains sous-espaces vectoriels :
- droites vectorielles ($\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)
- plans ($\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$)

Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$

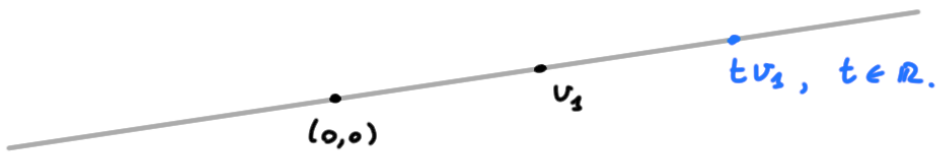
Déf: Si $v_1 \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\mathrm{Vect}(v_1) := \{ t v_1 \mid t \in \mathbb{R} \}$$

"partie de $\mathbb{R}^2$ engendrée par v_1"

Ex: $v_1 \in \mathrm{Vect}(v_1)$, $-v_1 \in \mathrm{Vect}(v_1)$

Rem:
- Si $v_1 = (0,0)$, $\mathrm{Vect}(v_1) = \{(0,0)\}$ (dimension 0)
  "espace nul"
- Si $v_1 \neq (0,0)$, $\mathrm{Vect}(v_1)$ est la droite vectorielle engendrée par v_1.
  dimension : 1



Déf: Soit V une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. La donnée d'un vecteur non-nul (quelconque) de V, disons v_1, est appelée une base de V ; on écrit :

$$\mathcal{B} : v_1 . \qquad \rightarrow V = \mathrm{Vect}(v_1).$$

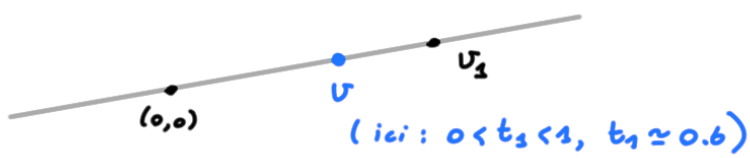
Rem: Il existe une infinité de bases différentes qui décrivent la même droite !

Si $\mathcal{B} : v_1$ est une base la droite vect. V, et si $v \in V$, alors v peut s'écrire comme un multiple de v_1 : $\exists\, t_1 \in \mathbb{R}$ t.q.

$$v = t_1 v_1$$

$\rightarrow$ t_1 est la composante / coordonnée de v relativement à la base $\mathcal{B}$.

Notation: $t_1 = [v]_{\mathcal{B}}$



Équation : Si V est une droite vectorielle, $V = Vect(v_1)$, $v_1 = (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$

Si $v = (x,y)$, alors

$$v \in V \iff v \text{ et } v_1 \text{ sont proportionnels}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & \alpha_1 \\ y & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \alpha_2 x = \alpha_1 y$$

Ex: Soit $V = Vect(v_1)$, $v_1 = (3,1)$

Son équation ? $v = (x,y) \in V \iff \begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{x = 3y}$

1) Comme $\boxed{B : v_1}$ est une base de V, on peut chercher la composante de $v = (x,y) \in V$ relativement à B :

$$v = t_1 v_1$$

changement de base

$v_1' = 3v_1$

$$(x,y) = t_1(3,1)$$

$$(3y,y) = t_1(3,1)$$

$$y(3,1) = t_1(3,1) \quad \Rightarrow \boxed{t_1 = y}$$

changement de coordonnée

$t_1' = t_1/3$

$$[v]_B = y = \frac{x}{3}$$

2) Comme $\boxed{B' : v_1'}$, $v_1' = (9,3)$, est aussi une base de V, on peut chercher la comp. de $v = (x,y) \in V$ relativement à B' :

$$v = t_1' v_1'$$

$$\vdots$$

$$y(3,1) = 3t_1'(3,1) \quad \Rightarrow \boxed{t_1' = \frac{y}{3}}$$

$$[v]_{B'} = \frac{y}{3} = \frac{x}{9}$$

Plus généralement : bases d'une droite vectorielle V (dans $\mathbb{R}^2$)

$$B : v_1 \underset{v_1 = \frac{1}{\alpha} v_1'}{\overset{v_1' = \alpha v_1}{\rightleftarrows}} B' : v_1' \qquad (\alpha \neq 0)$$

changmt de base

Pour un $v \in V$:

$$[v]_B = t_1 \underset{t_1 = \alpha t_1'}{\overset{t_1' = \frac{1}{\alpha} t_1}{\rightleftarrows}} [v]_{B'} = t_1'$$

changmt de coordonnées

En effet : $v = t_1 v_1 = t_1' v_1' = t_1'(\alpha v_1) = (t_1' \alpha) v_1$

$$(t_1 - t_1'\alpha)\, v_1 = (0,0)$$

$v_1 \neq (0,0)$

$\Rightarrow t_1 - t_1'\alpha = 0$

$\Rightarrow t_1' = \frac{1}{\alpha} t_1$

Plan et bases du plan

Déf : Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$.

$\mathrm{Vect}(v_1, v_2) := \{ t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$ ← "partie de $\mathbb{R}^2$ engendrée par v_1 et v_2."

Rem :

- Si $v_1 = v_2 = (0,0)$, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \{(0,0)\}$
- Si $\underbrace{\ }_{v_1 \text{ et } v_2 \text{ sont non-nuls, et si}}$ v_1 et v_2 sont proportionnels, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est une droite vectorielle.

- Si v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels, alors

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2 \qquad (\text{dimension} : 2)$$

Déf : La donnée d'une paire de vecteurs non-colinéaires $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ est une <u>base</u> de $\mathbb{R}^2$:

$$B : v_1, v_2$$

Si $B : v_1, v_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et si on considère un $v \in \mathbb{R}^2$, ce v peut se décomposer comme suit : $\exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que

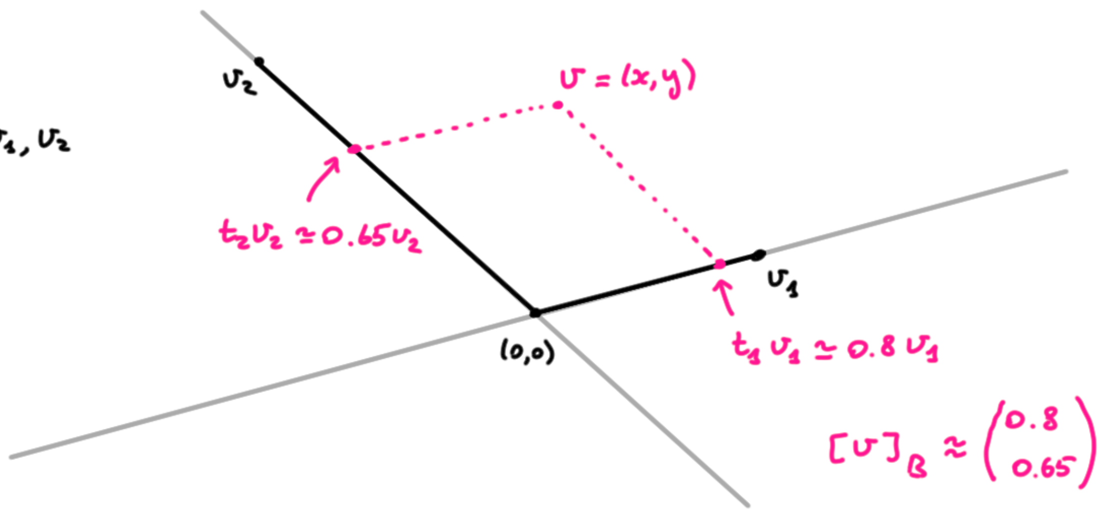
$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2$$

$\rightarrow$ t_1 et t_2 sont les <u>composantes de v relativement à</u> B :

$$[v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

⚠ Si $v = (x, y)$, $[v]_B \cancel{=} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$!

$B : v_1, v_2$



Ex: $v = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$ calculons ses composantes relativement à des bases différentes.

1) $\mathcal{B}$: $\underbrace{v_1 = (1,1),\ v_2 = (2,-1)}_{\text{pas proport.}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ est une base. $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$

On cherche t_1, t_2 t.q.

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2$$

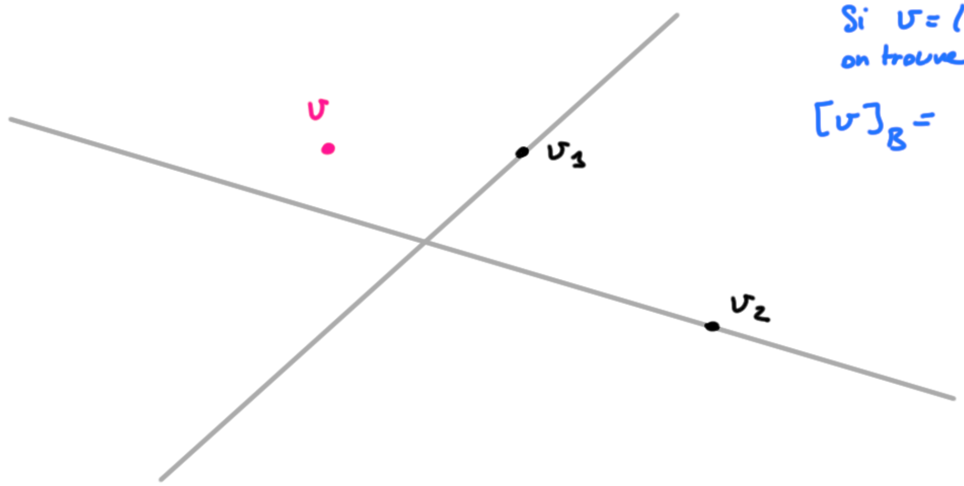
$$(-1,1) = t_1(1,1) + t_2(2,-1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = t_1 + 2t_2 \\ 1 = t_1 - t_2 \end{cases}$$

$$-2 = 3t_2 \Rightarrow t_2 = -2/3$$

$$t_1 = 1 + t_2 = 1/3$$

$$\boxed{[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}}$$

Si $v = (x,y)$, on trouve $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \\ \frac{x-y}{3} \end{pmatrix}$



2) $\mathcal{B}'$: $\underbrace{v_1' = (0,2),\ v_2' = (1/3, 0)}_{\text{pas proport.,}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ est une base. $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}$

On cherche : $v = t_1' v_1' + t_2' v_2'$

$$(-1,1) = t_1'(0,2) + t_2'(1/3,0) \qquad \begin{cases} -1 = t_2'/3 \\ 1 = 2t_1' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t_1' = 1/2, \quad t_2' = -3 \qquad [v]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Si $v = (x,y)$, $[v]_{B'} = \begin{pmatrix} y/2 \\ 3x \end{pmatrix}$

3) B_{can} : $v_1'' = (1,0)$, $v_2'' = (0,1)$, <u>base canonique</u>

$$v = (-1,1) = \underbrace{(-1)}_{t_1''}\underbrace{(1,0)}_{v_1''} + \underbrace{1}_{t_2''} \cdot \underbrace{(0,1)}_{v_2''} \Rightarrow [v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si $v = (x,y)$,

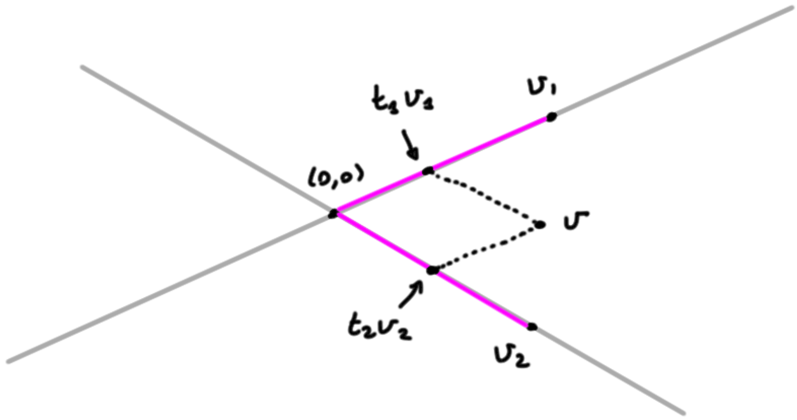
$$[v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ ne sont pas proportionnels, ils forment une <u>base</u>.

$\Rightarrow$ Tout $v \in \mathbb{R}^2$ peut se <u>décomposer</u> dans cette base :

$$v = \underline{t_1}\, v_1 + \underline{t_2}\, v_2 \iff [v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad \cancel{v = (t_1, t_2)}$$

composantes de v relativement à B: v_1, v_2.



<u>Ex</u>: B': $v_1' = (1,1)$, $v_2' = (2,-1)$

pas prop., donc B' est une base.

Si $v = (x,y)$, calculons ses composantes relativement à ...

1) ... B_{can} : $v = x\,(1,0) + y\,(0,1)$ $\longrightarrow$ $\boxed{[v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

B_{can}

2) ... B' : $v = \underbrace{t_1'}_{?}\, v_1' + \underbrace{t_2'}_{?}\, v_2'$

$$\begin{aligned} (x,y) &= t_1'(1,1) + t_2'(2,-1) \\ &= (t_1' + 2t_2',\ t_1' - t_2') \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} x = t_1' + 2t_2' \\ y = t_1' - t_2' \end{cases}$$

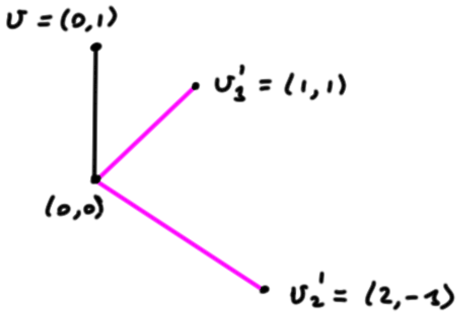
$$\Rightarrow \quad x - y = 3t_2' \quad \begin{cases} t_2' = \dfrac{x-y}{3}, \text{ donc} \\ t_1' = y + t_2' = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{3} \end{cases}$$

on inverse P !

$$\Rightarrow \quad \boxed{[v]_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \end{pmatrix}}$$

(x,y)

Par ex, si $v = (0,1)$, $[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$



$$\rightarrow \quad (0,1) = \frac{2}{3}(1,1) - \frac{1}{3}(2,-1)$$

Généralement : comment relier les composantes d'un vecteur v relativement à des bases B, B', B'',... différentes ?

Considérons deux bases de $\mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{array}{l} B : v_1, v_2 \\ B' : v_1', v_2' \end{array}\right\} \qquad \text{Si } v \in \mathbb{R}^2 \begin{array}{l} \nearrow [v]_B \\ \searrow [v]_{B'} \end{array} \text{ lien ?}$$

Comme B est une base, on peut décomposer v_1' et v_2' dans B :

$\exists\, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que

n'est pas une 2x2 !

$$(*) \begin{cases} v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ v_2' = \gamma v_1 + \delta v_2 \end{cases} \qquad \text{“}\, (v_1' \quad v_2') = (v_1 \quad v_2) \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \text{”}$$

Léger abus de notation...

Déf: La matrice
$$P := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \qquad (*) \text{ " } B' = BP \text{ "}$$
est la <u>matrice de changement de base de B vers B'</u>

Lemme: Les colonnes de P ne sont pas proportionnelles, donc P est <u>inversible</u>.

Preuve: Par l'absurde, si les colonnes de P étaient proportionnelles, par exemple si
$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \lambda\alpha \\ \beta & \lambda\beta \end{pmatrix},$$
$\cdot\lambda$

alors
$$v_2' = \underbrace{\lambda\alpha}_{\gamma} v_1 + \underbrace{\lambda\beta}_{\delta} v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda v_1',$$

donc $B' : v_1', v_2'$ n'est pas une base. $\square$

→ On a la réponse à notre question :

Proposition: $\forall\, v \in \mathbb{R}^2$
$$[v]_{B'} = Q\,[v]_B,$$
où $Q \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $Q = P^{-1}$.

Déf: On appelle $Q = P^{-1}$ la <u>matrice de changement de composantes/coordonnées de B à B'</u>.

Preuve: Soit $v \in \mathbb{R}^2$.

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 \qquad [v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$
$$v = t_1' v_1' + t_2' v_2' \qquad [v]_{B'} = \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}$$

Donc : $v = t_1'(\alpha v_1 + \beta v_2) + t_2'(\gamma v_1 + \delta v_2)$

$$= \underbrace{(t_1'\alpha + t_2'\gamma)}_{= t_1} v_1 + \underbrace{(t_1'\beta + t_2'\delta)}_{= t_2} v_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \alpha t_1' + \gamma t_2' \\ t_2 = \beta t_1' + \delta t_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{B'} = P^{-1} [v]_B \qquad \square$$

"ancienne" "nouvelle"

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left, "\cdot P"] & B' \arrow[l, bend left, "\cdot Q"] \end{tikzcd}$$

changement de base

$(v_1' \; v_2') = (v_1 \; v_2) P$

Si $v \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{tikzcd} {[v]_B} \arrow[r, bend left, "Q \cdot"] & {[v]_{B'}} \arrow[l, bend left, "P \cdot"] \end{tikzcd}$$

changement de coordonnées

Remarque : On n'utilise pas de notations comme "$P_{BB'}$".

$\underline{\text{Ex}}$: Comme plus haut : B' : $v_1' = (1,1)$, $v_2' = (2,-1)$

Si $\underset{(x,y)}{\overset{\shortparallel}{v}} \in \mathbb{R}^2$, $[v]_{B'} = ?$

On a : $[v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$B_{can} \xrightarrow{\cdot P} B'$$

$$[v]_{B_{can}} \xrightarrow{Q \cdot} [v]_{B'}$$

Puisque $\begin{pmatrix} v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \Big(\underbrace{(1,0) \quad (0,1)}_{B_{can}} \Big) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P}$

$$\Rightarrow [v]_{B'} = Q\,[v]_{B_{can}} = \underbrace{P^{-1}}\,[v]_{B_{can}}$$

$$= \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} + \frac{2}{3}y \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \end{pmatrix}$$

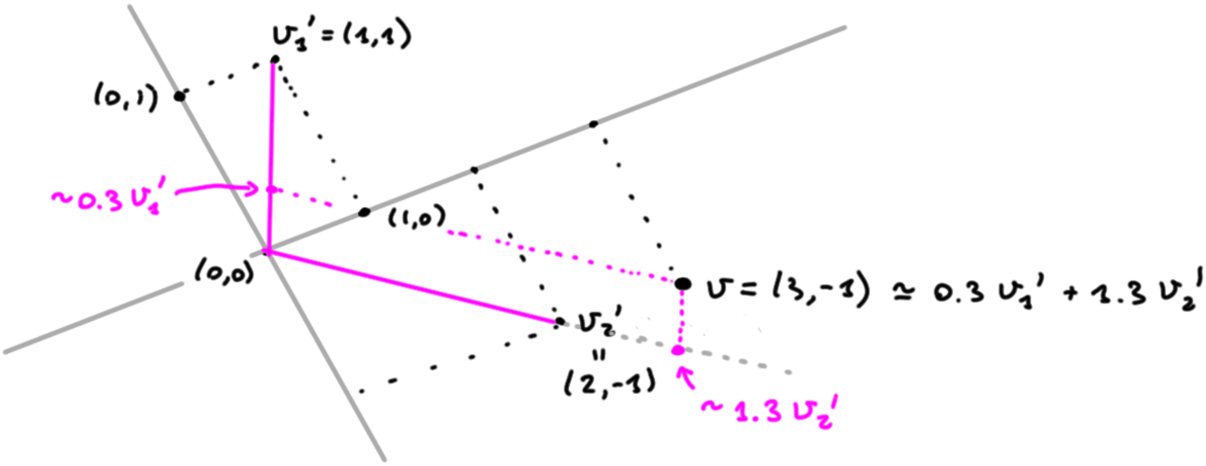
OK !

Par exemple, si $v = (3,-1)$,

$$[(3,-1)]_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} + \frac{2}{3}(-1) \\ \frac{3}{3} - \frac{(-1)}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$\Big($ En effet : $\underline{\underline{\frac{1}{3}(1,1) + \frac{4}{3}(2,-1) = (3,-1)}}$ $\Big)$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{3} v_1' + \frac{4}{3} v_2'$$



Ensuite, soit B'': $v_1'' = (0,2)$, $v_2'' = (1,0)$.

Si $v = (x,y)$, $[v]_{B''} = ?$

Deux façons : 1) $v = t_1'' v_1'' + t_2'' v_2''$

$$(x,y) = x \overbrace{(1,0)}^{v_2''} + \frac{y}{2} \overbrace{(0,2)}^{v_1''}$$

t_2'' $\qquad$ t_1''

$$\rightarrow [v]_{B''} = \begin{pmatrix} y/2 \\ x \end{pmatrix}$$

2) On sait que relativement à B': $v_1' = (1,1)$, $v_2' = (2,-1)$,

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} \end{pmatrix}$$

$$B' \xrightarrow{\ \cdot P\ } B''$$

$$[v]_{B'} \xrightarrow{\ Q\cdot\ } [v]_{B''}$$

<u>Rem</u>: $v_1' + v_2' = (3,0) = 3\, v_2''$

$\rightarrow v_2'' = \frac{1}{3} v_1' + \frac{1}{3} v_2'$

$2v_1' - v_2' = (0,3) = \frac{3}{2} v_1''$

$\rightarrow v_1'' = \frac{4}{3} v_1' - \frac{2}{3} v_2'$

$$\Longrightarrow (*) \begin{cases} v_1'' = \frac{4}{3} v_1' - \frac{2}{3} v_2' \\ v_2'' = \frac{1}{3} v_1' + \frac{1}{3} v_2' \end{cases} \qquad (v_1'' \ \ v_2'') = (v_1' \ \ v_2') \underbrace{\begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P}$$

$$\to Q = P^{-1} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \qquad \det P = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $[v]_{B''} = Q\,[v]_{B'} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/3 + 2y/3 \\ x/3 - y/3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{x/6} + y/3 - \cancel{x/6} + y/6 \\ x/3 + \cancel{2y/3} + \frac{2x}{3} - \cancel{\frac{2y}{3}} \end{pmatrix}$$

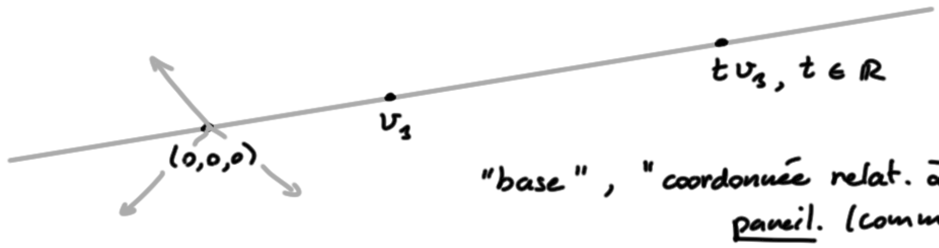
$$= \begin{pmatrix} y/2 \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{"OK"}$$

Droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$:

Déf: | Si $v_1 \in \mathbb{R}^3$, $\quad \mathrm{Vect}(v_1) = \{ t v_1 \mid t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$

"partie de $\mathbb{R}^3$ engendrée par v_1"

Si $v_1 \neq (0,0,0)$, $\mathrm{Vect}(v_1)$ est la droite vectorielle engendrée par v_1
"dirigée"



"base", "coordonnée relat. à une base": pareil. (comme dans $\mathbb{R}^2$)

<u>Équation</u> ? Soit $V = \mathrm{Vect}(v_1)$ une droite vectorielle, $v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$

Si $v \in \mathbb{R}^3$, alors

$$v \in V \iff v \text{ prop. à } v_1$$

$$\iff \exists\, t_1 \in \mathbb{R} \text{ t.q. } v = t_1 v_1$$

$$(x, y, z) = (t_1\alpha_1, t_1\alpha_2, t_1\alpha_3)$$

Cas : 1) si $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_3 \neq 0$:

$$t_1 = \boxed{\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\alpha_2} = \frac{z}{\alpha_3}}$$

c'est <u>deux</u> équations !

2) si $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq$, $\alpha_3 \neq 0$:

$$\boxed{x = 0} \quad \text{et} \quad t_1 = \boxed{\frac{y}{\alpha_2} = \frac{z}{\alpha_3}}$$

aussi <u>deux</u> équations.

Équations de droites dans $\mathbb{R}^3$ (suite)

Autre façon de voir: $V = \mathrm{Vect}(v_1)$, et $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$v \in V \iff v$ et v_1 sont colin.

si $v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2)$

$$\iff \mathrm{rg}\begin{pmatrix} x & \alpha_1 \\ y & \alpha_2 \\ z & \alpha_3 \end{pmatrix} \leq 1$$

$$\iff \det\begin{pmatrix} x & \alpha_1 \\ y & \alpha_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & \alpha_1 \\ z & \alpha_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} y & \alpha_2 \\ z & \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

Ex: 1) $v_1 = (3, -1, 2)$, $V = \mathrm{Vect}(v_1)$ est une droite vectorielle.

Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$v \in V \iff \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$$

donc $v = (x, y, z) = \left(x, -\frac{x}{3}, \frac{2}{3}z\right)$

$$= x\left(1, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{x}{3}\underbrace{(3, -1, 2)}_{v_1} \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}} = \frac{x}{3},$$

où $\mathcal{B}: v_1$

Mais si on écrit

$$v = (x, y, z) = x\underbrace{\left(1, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)}_{v_1'} \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}'} = x,$$

où $\mathcal{B}': v_1'$

$\cdot\frac{1}{3}$ $\cdot 3$

2) Soit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0,\ 5x+4z=0\}$. ← c'est une droite. Sa direction ?

$$v=(x,y,z)\in V \iff v=(x,0,-\tfrac{5}{4}x)$$

$$\iff v = x\underbrace{(1,0,-5/4)}_{=v_1}$$

Donc $V = \mathrm{Vect}(v_1)$

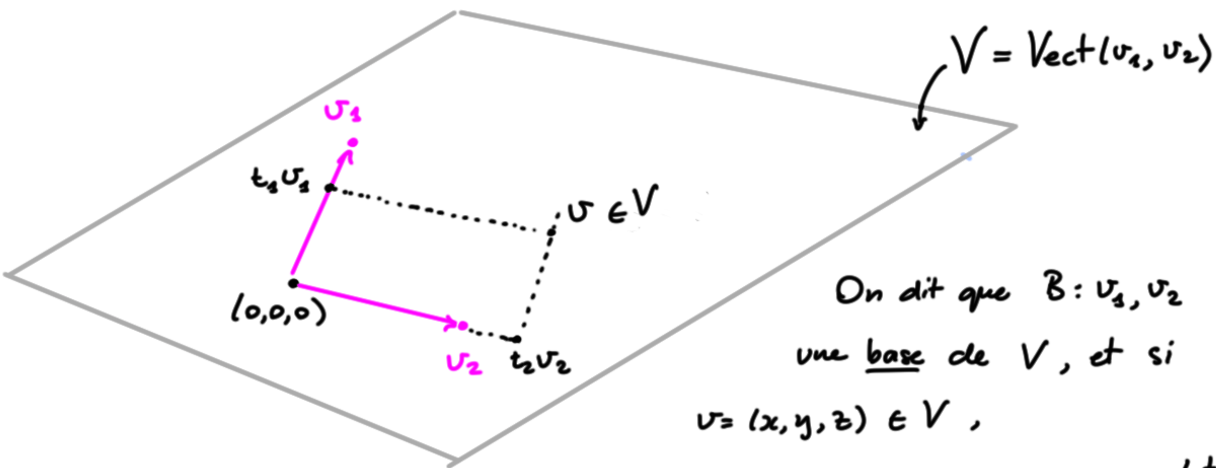
<u>Plans vectoriels dans $\mathbb{R}^3$</u>

<u>Déf:</u> Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}(v_1,v_2) := \{t_1v_1+t_2v_2 \mid t_1,t_2\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$

- Si v_1 et v_2 sont proportionnels, alors $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ est soit $\{(0,0,0)\}$, soit une droite vectorielle (dans le cas où l'un des deux est non-nul,

et l'autre lui est proportionnel.

- Si v_1 et v_2 ne sont <u>pas</u> proportionnels, $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ est un <u>plan vectoriel</u> (dimension 2 !)



On dit que $\mathcal{B}: v_1, v_2$ est une <u>base</u> de V, et si $v=(x,y,z)\in V$,

$$v = t_1v_1+t_2v_2 \iff [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

Équation de plan ?

Soit $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, $\quad v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
$\quad v_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

Si $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$v \in V \iff v \text{ est combin. lin. de } v_1 \text{ et } v_2$$

$$\iff \begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \beta_1 \\ y & \alpha_2 & \beta_2 \\ z & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \leftarrow \text{det!}$$

selon 1ère col.

$$\iff \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} z = 0}_{\text{une seule équation, du type}}$$

"$ax + by + cz = 0$"

Inversément, une équation du type "$ax + by + cz = 0$" caractérise un plan vectoriel, pour lequel on peut trouver une base $\mathcal{B}: v_1, v_2$.

Ex: 1) $\underbrace{v_1 = (1,0,1), \quad v_2 = (1,-2,3)}_{\text{pas proport., donc engendrent un plan } V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)}$

Son équation :

$$\underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & -2 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix}}= 0$$

$$x \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2x - 2y - 2z = 0$$

$$\boxed{x - y - z = 0}$$

2) Soit $V = \{ v=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x-y+z=0 \}$ ← c'est un plan

On a: $v=(x,y,z) \in V \iff 2x-y+z=0$ $\quad \Big\}\ y = 2x+z$

$\iff v = (x,\ 2x+z,\ z)$

$= x\underbrace{(1,2,0)}_{v_1} + z\underbrace{(0,1,1)}_{v_2}$

pas proport. (mais $v_1, v_2 \in V$!)

$\boxed{B: v_1, v_2}$ est une base de V, et

Si $v=(x,y,z) \in V$, $\boxed{[v]_B = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}}$ (*)

Si on avait choisi $z = y-2x$,

$v=(x,y,z) \in V \iff v = (x,\ y,\ y-2x)$

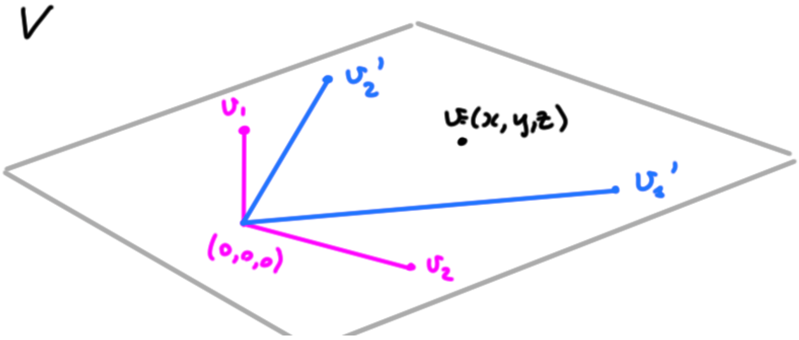
$= x\underbrace{(1,0,-2)}_{v_1'} + y\underbrace{(0,1,1)}_{v_2'}$

pas proport. (mais $v_1', v_2' \in V$!)

$\boxed{B': v_1', v_2'}$ est aussi une base de V, et

si $v=(x,y,z) \in V$, $\boxed{[v]_{B'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$ (*)'

Voyons comment obtenir (*)' à partir de (*), par un changement de base dans V



$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} : v_1, v_2 & \xrightarrow{\ \cdot P\ } & \mathcal{B}' : v_1', v_2' \\ [v]_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\ Q\cdot\ } & [v]_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

où : $v_1 = (1,2,0)$
$v_2 = (0,1,1)$

$v_1' = (1,0,-2)$
$v_2' = (0,1,1)$

$$\begin{cases} v_1' = \alpha\, v_1 + \beta\, v_2 \\ v_2' = \gamma\, v_1 + \delta\, v_2 \end{cases}$$

Comme $v_2' = v_2 \implies \underline{\gamma = 0}, \ \underline{\delta = 1}$

Aussi, $\underset{\alpha}{\underline{\underline{1}}} \cdot v_1 + \beta v_2 = (1,2,0) + (0,\beta,\beta) = \underbrace{(1, 2+\beta, \beta)}_{\substack{\shortparallel \\ (1,\,0,\,-2)}}$

donc $\underline{\beta = -2}$

$$\implies P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \implies Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc si $v = (x,y,z) \in V$,

$$[v]_{\mathcal{B}'} = Q\,[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x+z \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{"ok"}$$

Remarque : on aurait aussi pu écrire

$$v_1' = \alpha\, v_1 + \beta\, v_2$$

$$(1,0,-2) = \alpha(1,2,0) + \beta(0,1,1)$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 \\ 0 = \alpha \cdot 2 + \beta \cdot 1 \\ -2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \end{cases}$$

système 3×2 en α, β

On aurait aussi pu choisir une autre base de V :

$$V : \ 2x - y + z = 0 \quad \xrightarrow{\text{P. exemple :}} \quad \left.\begin{aligned} v_1'' &= (-1, 1, 3) \in V \\ v_2'' &= (1, 1, -1) \in V \end{aligned}\right\} \text{pas colin.}$$

$\rightarrow$ B'' : v_1'', v_2'' est une base

Si $v = (x, y, z) \in V$, $\quad [v]_{B''}$?

$$B \xrightarrow{\cdot R} B''$$

$$[v]_B \xrightarrow{R^{-1}\cdot} [v]_{B''}$$

On trouve que
$$\begin{aligned} v_1'' &= -v_1 + 3v_2 \\ v_2'' &= v_1 - v_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} [v]_{B''} &= R^{-1} [v]_B \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+z}{2} \\ \frac{3x+z}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow t_1'' \\ \leftarrow t_2'' \end{matrix} \end{aligned}$$

Ce qui signifie:
$$v = (x, y, z) \in V$$
$$\Updownarrow$$
$$v = t_1'' v_1'' + t_2'' v_2''$$

En effet : $\quad t_1'' v_1'' + t_2'' v_2'' = \frac{x+z}{2}(-1, 1, 3) + \frac{3x+z}{2}(1, 1, -1)$

$$= (x, \underbrace{2x + z}_{= y \text{ puisque } v \in V}, z)$$

$$= (x, y, z)$$

Soient $V : ax+by+cz=0$, $V' : a'x+b'y+c'z=0$ } deux "vrais" plans vect. de $\mathbb{R}^3$

Comment savoir si $V=V'$?

Proposition: $V=V' \iff (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels.

Preuve: $\Leftarrow$: OK.

$\Rightarrow$: Si $V=V'$, alors

- $(b,-a,0) \in V \Rightarrow (b,-a,0) \in V'$
$\Rightarrow a'b-b'a=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix}=0$

- $(c,0,-a) \in V \Rightarrow (c,0,-a) \in V'$
$\Rightarrow a'c-c'a=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a' & a \\ c' & c \end{vmatrix}=0$
- $(0,c,-b) \in V \Rightarrow (0,c,-b) \in V'$
$\Rightarrow \begin{vmatrix} b' & b \\ c' & c \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels. $\square$

Intersections de plans

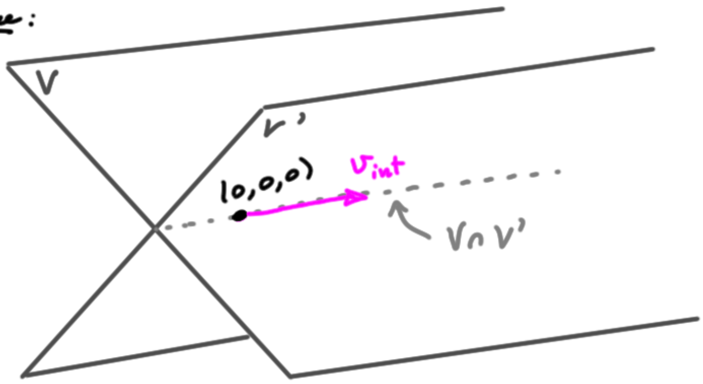
Soient V, V' comme avant. $V \cap V' = ?$

$V \subset \mathbb{R}^3$ $V' \subset \mathbb{R}^3$

Rem:

- On a toujours $V \cap V' \neq \emptyset$, car $(0,0,0) \in V$ et V'
- Si (a,b,c) et (a',b',c') sont proportionnels, alors $V = V'$, et donc $V \cap V' = V = V'$.
- Si (a,b,c) et (a',b',c') ne sont <u>pas</u> proportionnels, alors $V \cap V'$ est une droite vectorielle.

<u>Géométrique</u>:



<u>Algébrique</u>:

$$V \cap V' = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} ax + by + cz = 0 \\ \underline{\text{et}} \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{array} \right\}$$

↑ deux équations → droite !

<u>Proposition</u>: Si (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnels, alors

$$V \cap V' = \mathrm{Vect}(v_{int}) \qquad (\text{"int"} = \text{"intersection"}),$$

où

$$v_{int} = \left(\underbrace{\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}}_{\alpha}, \underbrace{-\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}}_{\beta}, \underbrace{\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}}_{\gamma} \right)$$

<u>Rem</u>: C'est un produit vectoriel $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

<u>Rem</u>: $v_{int} \neq (0,0,0)$!

Preuve: Posons $v_{int} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Vérifions, en calculant:

1) $$a\alpha + b\beta + c\gamma = a\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & a & a' \\ b & b & b' \\ c & c & c' \end{vmatrix} = 0 \implies v_{int} \in V$$

same!

2) $$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \cdots = \begin{vmatrix} a' & a & a' \\ b' & b & b' \\ c' & c & c' \end{vmatrix} = 0 \implies v_{int} \in V'$$

same

$\implies v_{int} \in V \cap V'$. $\implies V \cap V' = \mathrm{Vect}(v_{int})$ $\square$

Ex: $V: x - 3y + z = 0$, $V': 2x + y + 3z = 0$ } $(1,-3,1)$ et $(2,1,3)$ ne sont prop

Donc $V \cap V' = \mathrm{Vect}(v_{int})$, où

$$v_{int} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-10, -1, 7)$$

On aurait aussi pu calculer "à la main":

$$v = (x, y, z) \in V \cap V' \iff \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ \text{et} \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$\swarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 7y + z = 0 \end{cases} \to z = -7y$$

$$\hookrightarrow x = 3y - z = 10y$$

$$\Leftrightarrow v = (10y, y, -7y) = y(10, 1, -7) = (-y)(-10, -1, 7)$$

$\uparrow$ v.int.

40min

Bases de $\mathbb{R}^3$

Déf: Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$, $\quad v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $v_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $v_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) := \{ t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$$

"partie de $\mathbb{R}^3$ engendrée par v_1, v_2, v_3"

1) Si v_1, v_2, v_3 sont 2 à 2 proport., $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est une droite vect.

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \to \text{dimension } 1.$$

2) Si deux ne sont pas prop. et le 3è est combin. lin. des deux autres

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = 2$$

$\to$ dimension 2

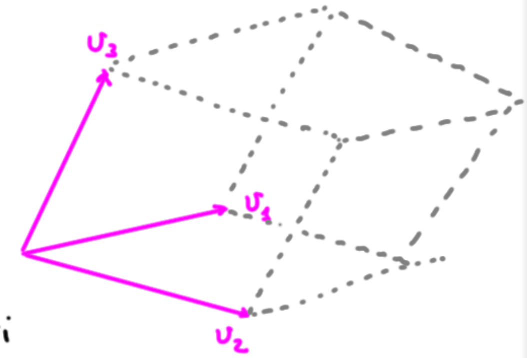
$\to$ $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ est un plan

↳ v_1, v_2, v_3 sont <u>liés</u>, et $\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{pmatrix} = 0$

3.) Si aucun des v_i peut s'écrire comme combin. lin. des autres, v_1, v_2, v_3 est <u>libre</u> ($\neq$ "pas lié"), et

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} = 3, \quad \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3,$$

$$\det\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \end{pmatrix} \neq 0$$



parallélépipède non-aplati

Dans ce cas on dit que $\mathcal{B}: v_1, v_2, v_3$ est une <u>base</u> de $\mathbb{R}^3$.

Si $v \in \mathbb{R}^3$, $\exists\ t_1, t_2, t_3$ t.q.

$$v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 \iff [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Changement de base :

$\cdot P$ ← matrice de changement de <u>base</u>

$$\mathcal{B}: v_1, v_2, v_3 \xrightarrow{\cdot P} \mathcal{B}': v_1', v_2', v_3'$$

$\in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$$(v_1'\ v_2'\ v_3') = (v_1\ v_2\ v_3)\,P$$

$$[v]_{\mathcal{B}} \xrightarrow{Q\cdot} [v]_{\mathcal{B}'} = Q\,[v]_{\mathcal{B}}$$

où $Q = P^{-1}$

Ex: 1) $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$

pas liée $\Rightarrow$ B_{can}: v_1, v_2, v_3 est une base, la <u>base canonique</u>.

Si $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \iff [v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2) $v_1 = (3,0,0)$, $v_2 = (0,0,\frac{1}{2})$, $v_3 = (0,-1,0)$

pas liée $\Rightarrow$ B : v_1, v_2, v_3 est une base

Si $v = (x,y,z) = \frac{x}{3}\underbrace{(3,0,0)}_{v_1} + 2z\underbrace{(0,0,\frac{1}{2})}_{v_2} + (-y)\underbrace{(0,-1,0)}_{v_3}$

$$\Rightarrow \quad [v]_B = \begin{pmatrix} x/3 \\ 2z \\ -y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{[v]_{B_{can}}}$$

On savait que :

$$v_1 = 3(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$v_2 = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + \frac{1}{2}(0,0,1)$$

$$v_3 = 0(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (= Q^{-1} \dots)$$

3) $v_1 = (-1, 1, 1)$ $\quad v_2 = (0, 2, 1)$ $\quad v_3 = (1, 0, 2)$

liée ou pas ?

Posons :

$$P := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \det(P) = -5 \neq 0$

$\rightarrow v_1, v_2, v_3$ pas liée

$\rightarrow B : v_1, v_2, v_3$ est une base

De plus P est la matrice de chgmt de base de B_{can} vers B.

$$(v_1 \; v_2 \; v_3) = \big((1,0,0) \; (0,1,0) \; (0,0,1) \big) P$$

Donc aussi

$$[v]_{B_{can}} \xrightarrow{Q\cdot} [v]_B = Q\,[v]_{B_{can}}$$

On trouve:

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $v = (x, y, z)$,

$$[v]_B = Q \overset{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{[v]_{B_{can}}} = \begin{pmatrix} \frac{-4x - y + 2z}{5} \\ \frac{2x + 3y - z}{5} \\ \frac{x - y + 2z}{5} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(x,y,z) = \ & \tfrac{1}{5}(-4x-y+2z)\underbrace{(-1,1,1)}_{v_1} \\ & + \tfrac{1}{5}(2x+3y-z)\underbrace{(0,2,1)}_{v_2} \\ & + \tfrac{1}{5}(x-y+2z)\underbrace{(1,0,2)}_{v_3}\end{aligned}}$$

<u>Remarque:</u> $\text{Vect}(v_1, v_2) = \{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid v \text{ est combin. lin. de } v_1 \text{ et } v_2 \}$

$$= \{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 0 \}$$

Pareil:

$$\text{Vect}(v_1, v_3) = \{ v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0 \}$$

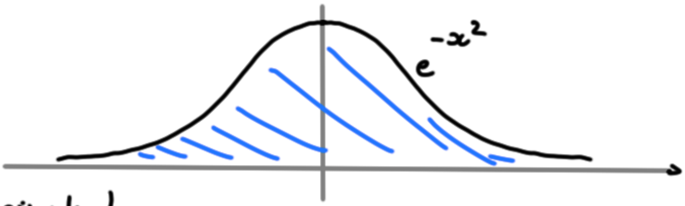
(À propos de l'évaluation)

Interprétation géométrique du déterminant (bis!)

Motivation:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = ?$$

pas de primitive simple !



Idée:

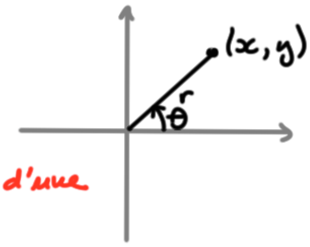
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overbrace{(x^2+y^2)}^{r^2}}\,dx\,dy$$

changement de variable

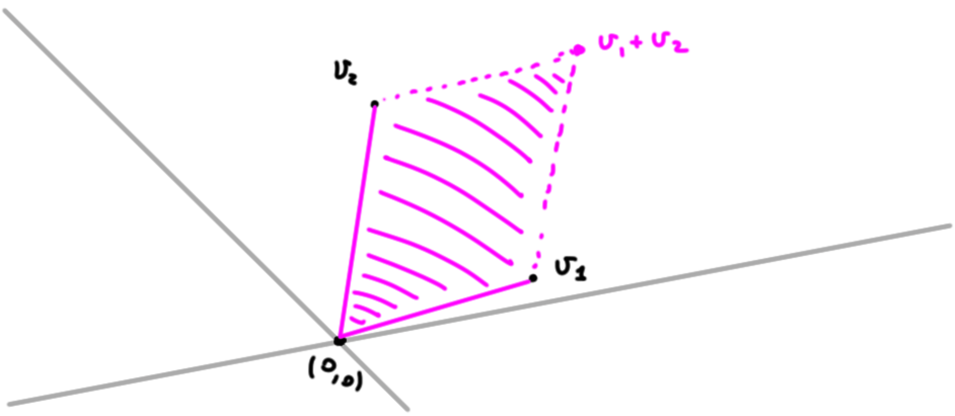
$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2}\,\boxed{r}\,dr\,d\theta$$

Jacobien !

déterminant d'une matrice...



Fixons un repère dans le plan, et considérons $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$



Déf: L'aire orientée de v_1, v_2 est

$\sigma(v_1, v_2) := \pm$ aire du parallélogramme hachuré,

où on prend "+" si le sens de rotation de v_1 vers v_2 est positif (au sens trigonométrique / anti-horaire), "−" sinon.

Ex: 1) 

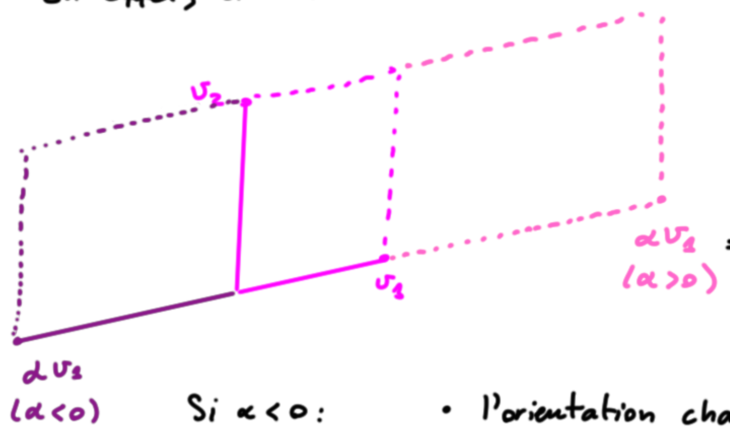
<u>Propriétés</u>:

1) $\boxed{\sigma(v_2, v_1) = -\sigma(v_1, v_2)}$ "antisymétrie"

En effet en échangeant v_1 et v_2, l'orientation change de signe, mais pas l'aire.

2)
$$\boxed{\begin{array}{ll} \sigma(\alpha v_1, v_2) = \alpha\, \sigma(v_1, v_2) & \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \\ \sigma(v_1, \beta v_2) = \beta\, \sigma(v_1, v_2) & \forall\, \beta \in \mathbb{R} \end{array}}$$

En effet, si $\alpha > 0$:



- l'orientation ne change pas,
- l'aire est multipliée par α.

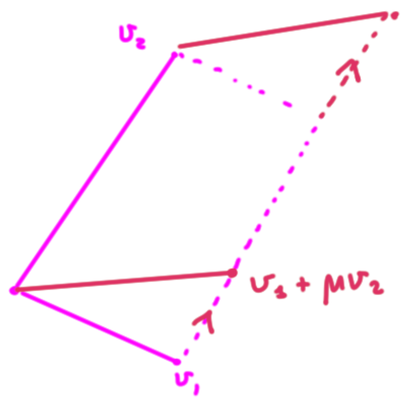
$\Rightarrow \sigma(\alpha v_1, v_2) = \alpha\, \sigma(v_1, v_2)$

Si $\alpha < 0$:

- l'orientation change
- l'aire est multipliée par $|\alpha|$

$$\Rightarrow \sigma(\alpha v_1, v_2) = \underbrace{-|\alpha|}_{=\alpha}\, \sigma(v_1, v_2) = \alpha\, \sigma(v_1, v_2)$$

3)
$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma(v_1 + \mu v_2, v_2) = \sigma(v_1, v_2) \\ \sigma(v_1, v_2 + \mu v_1) = \sigma(v_1, v_2) \end{array}}$$
$\forall\, \mu \in \mathbb{R}$ "opération du pivot"



En effet,

- l'orientation ne change pas
- l'aire non plus.

4) **Théorème :** Si $(v_1' \ v_2') = (v_1 \ v_2) \overset{2\times 2}{P}$, alors

$$\sigma(v_1', v_2') = \det(P) \cdot \sigma(v_1, v_2)$$

Preuve : Si $P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$, $\begin{cases} v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ v_2' = \gamma v_1 + \delta v_2 \end{cases}$, et donc, en

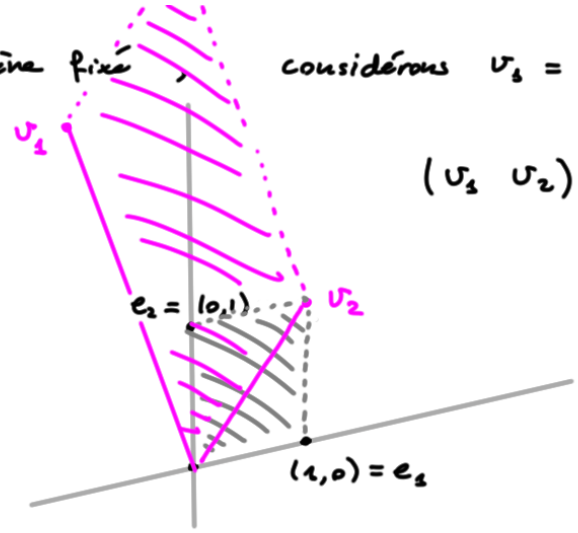
45min

supposant que $\delta \neq 0$

$$\begin{aligned}
\sigma(v_1', v_2') &= \sigma\left(v_1' - \tfrac{\beta}{\delta} v_2', v_2'\right) && \text{par 3), et car} \\
&= \sigma\left(\left(\alpha - \tfrac{\beta\gamma}{\delta}\right) v_1, v_2'\right) && v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2,\ v_2' = \gamma v_1 + \delta v_2 \\
&= \left(\alpha - \tfrac{\beta\gamma}{\delta}\right) \sigma(v_1, v_2') && \text{par 2)} \\
&= \left(\alpha - \tfrac{\beta\gamma}{\delta}\right) \sigma(v_1, v_2' - \gamma v_1) && \text{par 3)} \\
&= \left(\alpha - \tfrac{\beta\gamma}{\delta}\right) \sigma(v_1, \delta v_2) \\
&= \left(\alpha - \tfrac{\beta\gamma}{\delta}\right) \delta\, \sigma(v_1, v_2) && \text{par 2)} \\
&= \underbrace{(\alpha\delta - \beta\gamma)}_{= \det(P)\,!} \sigma(v_1, v_2) && \square
\end{aligned}$$

Ex: Dans une repère fixé, considérons $v_1 = (-1,2)$ $\quad v_2 = (1,1)$

$$(v_1 \ \ v_2) = (e_1 \ \ e_2) \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$



$$\sigma(v_1, v_2) = \det(P)\, \sigma(e_1, e_2) = -3\, \sigma(e_1, e_2)$$

aire = 3 · aire

l'orientation de v_1, v_2 a changé par rapport à celle de e_1, e_2

Droites affines de $\mathbb{R}^2$

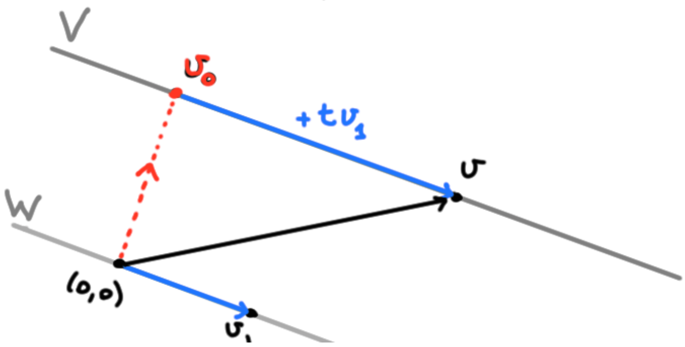
Déf: Si $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^2$, $\quad (v_1 \neq (0,0))$

$$V := \{ v_0 + t v_1 \mid t \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^2$$

est la droite affine contenant v_0, dirigée par v_1

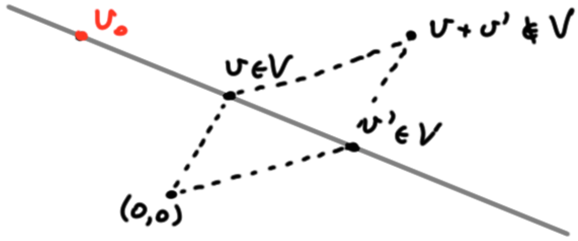
description paramétrique de V

$$v \in V \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \text{ t.q. } v = v_0 + t v_1$$



Remarques :

- Si $v_0 = (0,0)$, V est une droite vectorielle (c'est un espace vectoriel !)
- Si $v_0 \neq (0,0)$, V n'est **pas** un espace vectoriel :



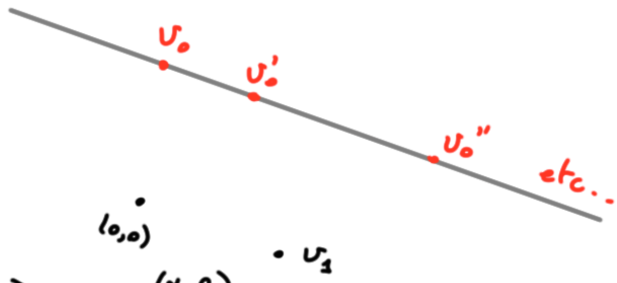
- $v \in V \iff v - v_0 \in \mathrm{Vect}(v_1) =: W$

Donc V est le translaté de W par v_0 :

$$V = v_0 + W = v_0 + \mathrm{Vect}(v_1)$$

W s'appellera la droite vectorielle associée à V.

- Il y a une infinité de choix possibles pour v_0 !



(μ,ν) (α,β)

Équation : Si $v = (x,y)$, $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^2$, on a

$$v \in V = v_0 + \mathrm{Vect}(v_1) \iff \underbrace{v - v_0} \in \mathrm{Vect}(v_1)$$

$$\iff (x-\mu, y-\nu) \in \mathrm{Vect}((\alpha,\beta))$$

$$\iff \begin{vmatrix} x-\mu & \alpha \\ y-\nu & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x-\mu)\beta - (y-\nu)\alpha = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \beta x - \alpha y = \mu\beta - \nu\alpha$$

Donc la forme générale pour l'équat. d'une droite affine:

$$V : \quad \boxed{ax + by = c}$$

- La partie "$ax+by$" contient l'information sur la <u>direction</u> de V : $v_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

- En remplaçant c par 0, on obtient

$$W : \quad \boxed{ax + by = 0}$$ ← c'est l'équation de la droite vectorielle associée.

<u>Ex</u>: $V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y = 6 \}$ ← descr. param.

Choisissons un point : $v_0 = (6,0)$ (ou $v_0' = (3,1)$, $v_0'' = (0,2)$ etc...)

une direction: $v_1 = (-3,1)$

$$\rightarrow V = (6,0) + \underbrace{\mathrm{Vect}\big((-3,1)\big)}_{W}$$

<u>Rem</u>: Si $V : ax + by = c$, et si $v_0 = (x_0, y_0) \in V$, v_0 un point particulier. Alors $ax_0 + by_0 = c$

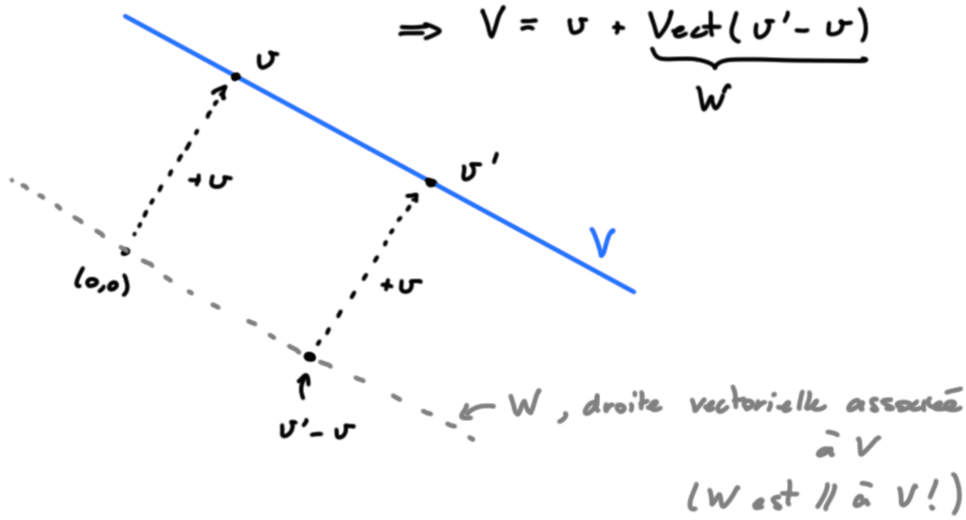
$$ax + by = ax_0 + by_0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \iff v - v_0 \in \mathrm{Vect}((-b,a))$$

10h20 → 12h : BS 270

Droite passant par 2 points : $v, v' \in \mathbb{R}^2$, $v \neq v'$

$$\Rightarrow V = v + \underbrace{\mathrm{Vect}(v'-v)}_{W}$$

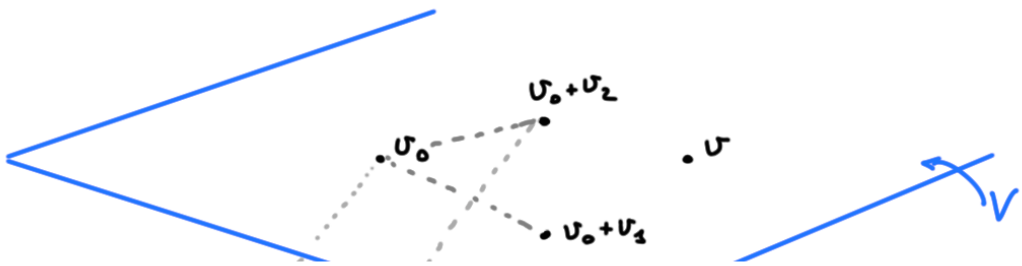


Plans affines de $\mathbb{R}^3$

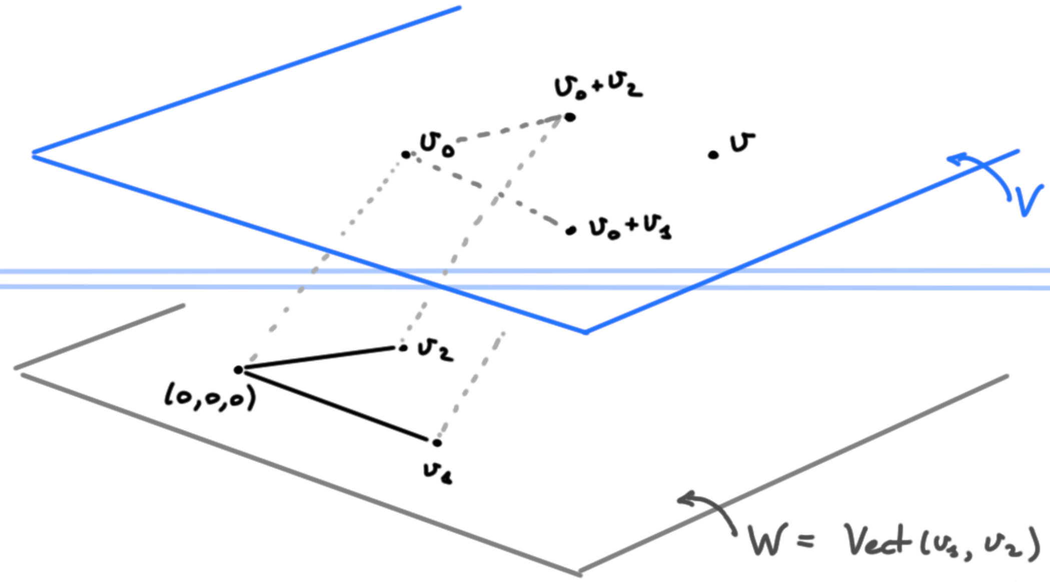
Déf: Si $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, v_1 et v_2 pas colinéaires, alors

$$V := \{ v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$$

- Si $v_0 = (0,0,0)$, V est le plan vectoriel d'avant
- Si $v_0 \neq (0,0,0)$, V n'est plus un espace vectoriel, mais le plan affine contenant v_0, dirigé par v_1 et v_2



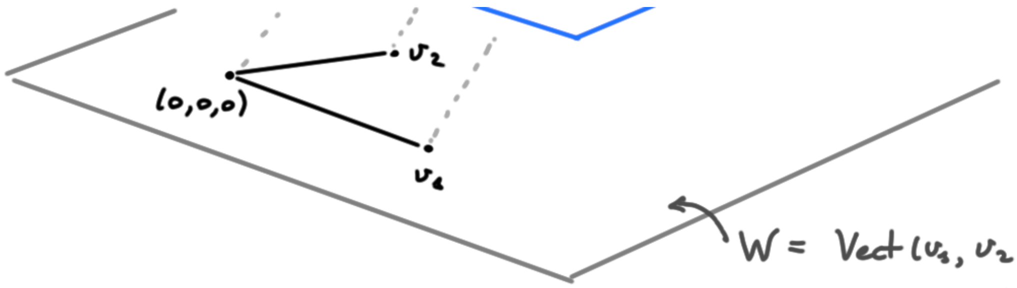
plan affine contenant v_0, dirigé par v_1 et v_2



$W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est le plan vectoriel associé à V.

(W est $/\!/$ à V!)

$\Rightarrow \boxed{V = v_0 + \mathrm{Vect}(v_1, v_2)}$



$W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ est le plan vectoriel associé à V.

(W est $/\!/$ à V!)

$\Rightarrow \boxed{V = v_0 + \mathrm{Vect}(v_1, v_2)}$

Équation d'un plan affine : Soient $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $v_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$\underset{\uparrow \atop v = (x,y,z)}{v \in V} \iff v - v_0 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ y - y_0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ z - z_0 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

L'éq. de W :

$$\begin{vmatrix} x & \alpha_1 & \beta_1 \\ y & \alpha_2 & \beta_2 \\ z & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad \boxed{ax+by+cz=0}$$

équation homogène associée à (*)

$$(*) \quad \boxed{ax+by+cz = \underbrace{ax_0+by_0+cz_0}_{\text{"d"}}}$$

"direction de V"

"point particulier"

équation générale d'un plan affine

Ex:

1. $V = \{(-2+t_1+2t_2,\ 3+3t_1-t_2,\ 1+t_1+3t_2) \mid t_1,t_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ ← forme paramétrique

↑ équation ?

$$= \{ \underbrace{(-2,3,1)}_{v_0} + t_1 \underbrace{(1,3,1)}_{v_1} + t_2 \underbrace{(2,-1,3)}_{v_2} \mid t_1,t_2 \in \mathbb{R} \}$$

→ V est un plan affine ($v_0 \neq (0,0,0)$)

Équation homogène (éq. de $W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$) associée :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 3 & -1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \longrightarrow \quad 10x - y - 7z = 0$$

Équation de V :

$$10x - y - 7z = 10\cdot\underset{x_0}{(-2)} - \underset{y_0}{3} - 7\cdot\underset{z_0}{1} = -30$$

$$\Longrightarrow \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 10x - y - 7z = -30\}$$ ← forme "équation"

2. $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 3\}$ ← plan affine

v_0 ? vecteurs directeurs ?

P. ex : $v_0 = (0,3,0) \in V$

Plan vectoriel associé : $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$

directions : choisir deux $v_1, v_2 \in W$ pas proportionnels !

P.ex : $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (\frac{1}{2}, 0, 1)$

$$W = \text{Vect}(v_1, v_2)$$

$$\Rightarrow V = (0,3,0) + \text{Vect}\big((0,1,1), (\tfrac{1}{2},0,1)\big)$$
$$= \{(0,3,0) + t_1(0,1,1) + t_2(\tfrac{1}{2},0,1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

ou :

$$V = (0,0,-3) + \text{Vect}\big((0,1,1), (5,2,12)\big)$$

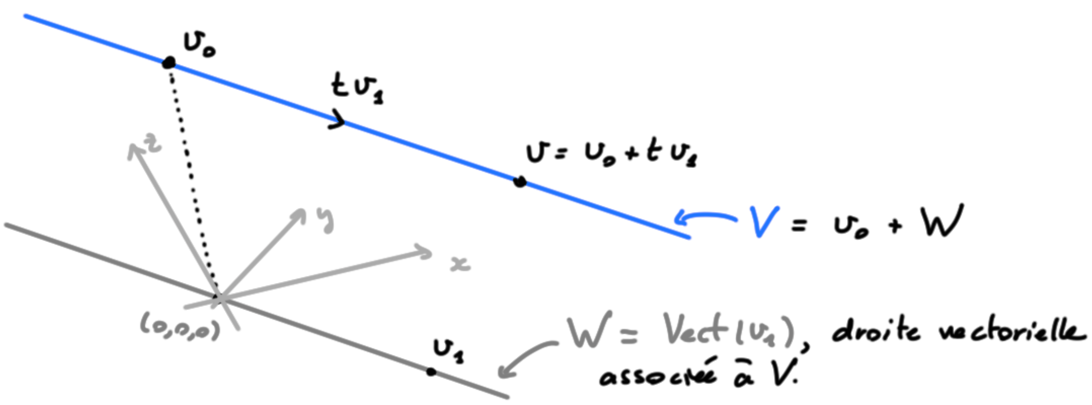
etc...

Droites affines de $\mathbb{R}^3$

Déf : Si $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^3$, $v_1 \neq (0,0,0)$,

$$V := \{v_0 + t v_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

droite affine contenant v_0, dirigé par v_1



Équations $\quad v \in V \iff v - v_0 \in \mathrm{Vect}(v_1) = W$

$v_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\quad v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq (0,0,0)$

$\iff \exists\, t \in \mathbb{R}$ t.q. $v - v_0 = t\, v_1$

$$(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0) = (t\alpha_1,\ t\alpha_2,\ t\alpha_3)$$

Cas:

1) $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0,\ \alpha_3 \neq 0$:

"$t =$" $\boxed{\dfrac{x - x_0}{\alpha_1} = \dfrac{y - y_0}{\alpha_2} = \dfrac{z - z_0}{\alpha_3}}$

2 équations !

W associée :

$\boxed{\dfrac{x}{\alpha_1} = \dfrac{y}{\alpha_2} = \dfrac{z}{\alpha_3}}$

2) $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 \neq 0,\ \alpha_3 \neq 0$:

$\boxed{x = x_0\ , \qquad \dfrac{y - y_0}{\alpha_2} = \dfrac{z - z_0}{\alpha_3}}$

2 équations

W associé :

$\boxed{x = x_0 \qquad \dfrac{y}{\alpha_2} = \dfrac{z}{\alpha_3}}$

3) $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 \neq 0$:

$\boxed{y = y_0\ , \qquad \dfrac{x - x_0}{\alpha_1} = \dfrac{z - z_0}{\alpha_3}}$

4) $\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0\ ,\ \alpha_3 = 0$:

$\boxed{z = z_0 \qquad \dfrac{x - x_0}{\alpha_1} = \dfrac{y - y_0}{\alpha_2}}$

5) $\alpha_1 = 0, \; \alpha_2 = 0, \; \alpha_3 \neq 0$:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_0, \quad y = y_0 \\ + \; z \text{ arbitraire} \end{array}} \; , \quad \underbrace{z = \underset{\text{fixé}}{z_0} + \underset{\text{arbitraire}}{t}\,\underset{\alpha_3 \neq 0}{\alpha_3}}_{\Rightarrow\; z \in \mathbb{R} \text{ arbitraire.}}$$

↖ // Oz

6) $\alpha_1 = 0, \; \alpha_2 \neq 0, \; \alpha_3 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_0, \quad z = z_0 \\ + \; y \text{ arbitraire} \end{array}}$$

↖ // Oy

7) $\alpha_1 \neq 0, \; \alpha_2 = 0, \; \alpha_3 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = y_0, \quad z = z_0 \\ + \; x \text{ arbitraire} \end{array}}$$

↖ // Ox

V : droite // à un des axes de coord.

<u>Ex</u>: ① $V = \{ (x,y,z) = (3+t, -2, 1+2t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

$$= \{ (x,y,z) = \underbrace{(3,-2,1)}_{v_0} + t\,\underbrace{(1,0,2)}_{v_1 \neq (0,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$= v_0 + \text{Vect}(v_1)$$

<u>Équations</u>: $v_1 = (\underset{\alpha_1}{1}, \underset{\alpha_2}{0}, \underset{\alpha_3}{2})$ $\longrightarrow$ $\boxed{\underbrace{y = -2}_{} \; , \; \underbrace{\frac{x-3}{1} = \frac{z-1}{2}}_{}}$

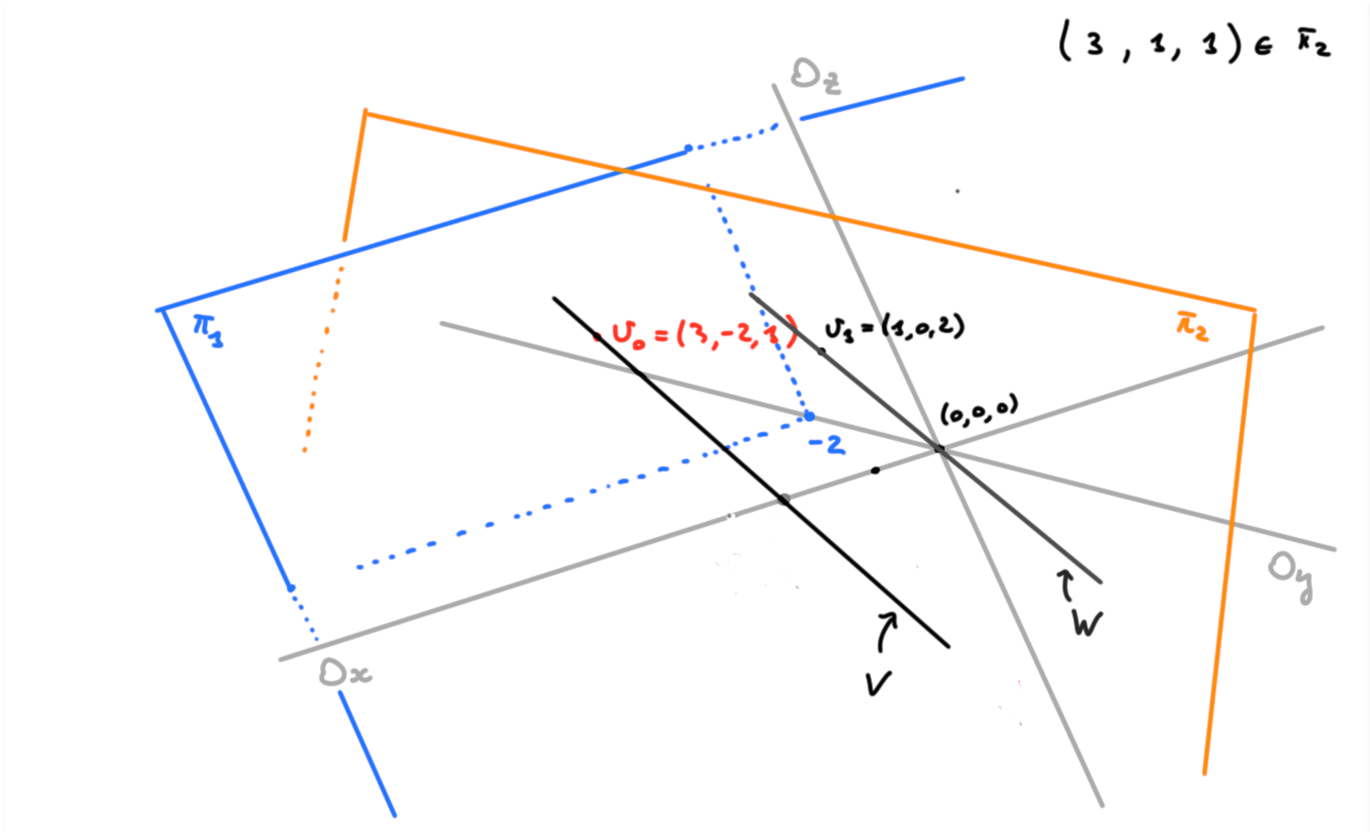
π_1 : plan affine : $0 \cdot x + y + 0 \cdot z = -2$ // à Oxz

π_2 : plan affine : $2x - z = 5$ // Oy $\quad z = 2x - 5$

p. ex :

$(5/2, 0, 0) \in \pi_2$

$(1, 0, -3) \in \pi_2$


(3 , 1, 1) ∈ π2
Oz
π1
π2
U0 = (3,-2,1)
U1 = (1,0,2)
(0,0,0)
-2
Oy
W
V
Ox

3. Applications linéaires

Déf: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $v \mapsto f(v)$ est linéaire si

"f préserve la multiplic. par scalaires"

1) $\forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n$, $f(tv) = t f(v)$
2) $\forall v, v' \in \mathbb{R}^n$, $f(v+v') = f(v) + f(v')$

"f préserve les sommes"

écriture plus compacte: $\forall v, v' \in \mathbb{R}^n, \forall t, t' \in \mathbb{R}$,

$$f(tv + t'v') = t f(v) + t' f(v').$$

(On dit aussi que f respecte les structures vectorielles.)

Ex: $(n = p = 2)$

1) $v = (x,y) \mapsto f(v) = (x \cdot y, x + y)$

n'est pas linéaire. P. ex. $\underbrace{f(2(1,1))}_{=(4,4)} \neq \underbrace{2 f((1,1))}_{=(2,4)}$

2) $v = (x,y) \mapsto f(v) = (2x+y, 5x-3y)$ est linéaire

(car associée à une matrice, voir plus bas !)

Déf: Soit $A = [\alpha_{ij}]_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$; on peut définir

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$v = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(v) = (f(v)_1, \dots, f(v)_p)$$, en posant:

$$f(v)_i := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \qquad \forall i = 1, \dots, p$$

On dit que f est associée à A.

Ex: $n = p = 2$, Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $v = (x,y) \mapsto f(v) = (ax+by, cx+dy)$

Théorème: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire $\Longleftrightarrow$ f est associée à une matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

De plus A est donnée par

$$A = \Big(\underbrace{[f(e_1)]_{B_{can}}}\ \cdots\ \underbrace{[f(e_n)]_{B_{can}}} \Big) \quad p \text{ lignes}$$

n colonnes

appelée **matrice de f en base canonique**

Les colonnes de A sont les images des $e_1, \dots, e_n$ de $B_{can}, \mathbb{R}^n$, que l'on décompose dans $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p$ de $B_{can}, \mathbb{R}^p$.

Preuve dans le cas $n = p = 2$:

$\Longrightarrow$ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linéaire. Soit $v = (x, y)$

$$f(v) = f(x e_1 + y e_2) \qquad e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$$

$$= x \underbrace{f(e_1)}_{\in \mathbb{R}^2} + y \underbrace{f(e_2)}_{\in \mathbb{R}^2}$$

$$f(v) = x\,(f(e_1)_1, f(e_1)_2) + y\,(f(e_2)_1, f(e_2)_2)$$
$$= (f(e_1)_1 \cdot x + f(e_2)_1 \cdot y,\ f(e_1)_2 \cdot x + f(e_2)_2 \cdot y)$$

$$[f(v)]_{B_{can}} = x\,[f(e_1)]_{B_{can}} + y\,[f(e_2)]_{B_{can}}$$

$$= \underbrace{\Big[\ [f(e_1)]_{B_{can}}\ [f(e_2)]_{B_{can}}\ \Big]}_{A \in M_{2,2}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{[v]_{B_{can}}}$$

$\Longleftarrow$: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$f(v) = f((x,y)) = (ax + by,\ cx + dy)$$

1) $\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f(tv) = f((tx, ty)) = (a(tx) + b(ty),\ c(tx) + d(ty))$

$$= t\,(ax + by,\ cx + dy)$$

$$= t\, f(v)$$

2) $\forall\, v, v' \in \mathbb{R}^2, \quad f(v + v') = \cdots = f(v) + f(v')$

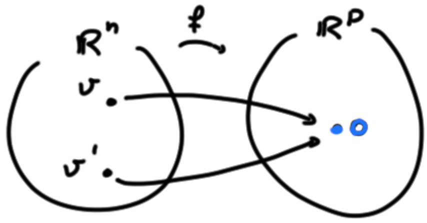
faites-le !

Donc f est linéaire. $\square$

<u>Exemples</u> : ① $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

$$v \longmapsto 0 = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{p\,!}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{p,n}$$



② $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$v \longmapsto f(v) = v \qquad A = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

③ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$v = (x, y) \longmapsto f(v) = (x - y,\ -x + 2y) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\quad [v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow [f(v)]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

P. ex : $\quad [v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow [f(v)]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{JSX}}$

<u>But</u> : Étudier $v \mapsto f(v)$ d'un point de vue <u>géométrique</u>.

④ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = (x,y) \longmapsto f(v) = (x, 0)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>géom</u> : f est une projection sur Ox, // à Oy

JSX

⑤ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$v = (x,y) \longmapsto f(v) = (2x, 2y)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= 2v$

45min

<u>géom</u> : f est une homothétie de rapport 2.

⑥ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$v = (x,y,z) \longmapsto f(v) = (-2x + 3y + z,\ x + y - 3z,\ x - 4y + 2z)$

↖ géométrie ?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exprimons $[f(v)]_{B_{can}} = \underbrace{A\,[v]_{B_{can}}}_{= A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$ de deux façons

I) $$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (-2 \ \ 3 \ \ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ \ 1 \ \ -3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ \ -4 \ \ 2)$$

↖ minimale ? ("non")

II) $f(v) = x(-2, 1, 1) + y(3, 1, -4) + z(1, -3, 2)$

| dans $B_{can}, \mathbb{R}^3$

$$[f(v)]_{B_{can}} = x\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

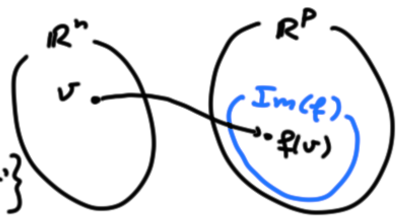
$$= \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}(0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}(0\ 0\ 1)}_{A}\Bigg)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

minimal ? ("non")

Ensemble image et rang

Déf: L'ensemble image de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est

$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathbb{R}^p$$
$$= \{ v' \in \mathbb{R}^p \mid \exists\, v \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } f(v) = v' \}$$



Comprendre $\mathrm{Im}(f)$ c'est comprendre comment f "remplit" l'ensemble d'arrivée.

2, ou 3 !

Théorème: Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire. Alors $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^p$ est un sous-espace de dimension r, où

$$r = \mathrm{rang}(A), \quad A \text{ la matrice associée à } f$$
(base canon.)

(On définira le rang de f ainsi : $\mathrm{rg}(f) := \mathrm{rg}(A)$.)

Preuve: Cas $n = p = 3$. On peut toujours écrire $\forall\, v \in \mathbb{R}^3$,

$$f(v) = f((x,y,z)) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$
$$= x\underbrace{f(e_1)}_{v_1 \in \mathbb{R}^3} + y\underbrace{f(e_2)}_{v_2 \in \mathbb{R}^3} + z\underbrace{f(e_3)}_{v_3 \in \mathbb{R}^3}$$

linéarité.

$\Longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$

les relations linéaires entre ces points sont les mêmes que celles existant entre les colonnes de $A = \left([v_1]_{B_{can}} \ [v_2]_{B_{can}} \ [v_3]_{B_{can}} \right)$

Soit $r := \mathrm{rang}(A)$.

- Si $\underline{r=0}$: $v_1 = v_2 = v_3 = (0,0,0) \longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \{(0,0,0)\}$

  dim $= 0$

- Si $\underline{r=1}$: v_1, v_2, v_3 proportionnels (non nuls) $\longrightarrow$ alignés,

  tous

  $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$ droite vect.

  pas nul

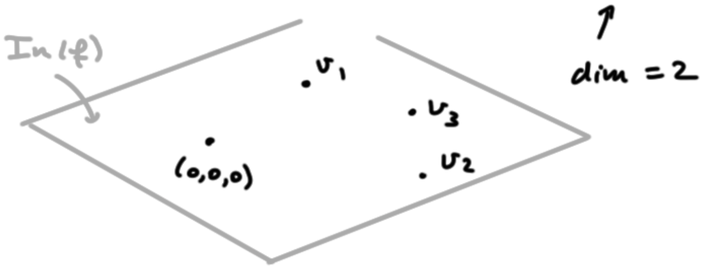
  dim $=1$

- Si $\underline{r=2}$: deux des v_i sont pas prop., disons v_1 et v_2

  le 3ème combin. lin des deux autres

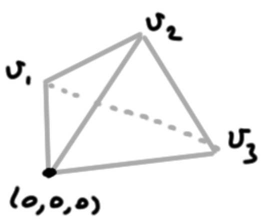
$\longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ plan vect.

dim $= 2$



- Si $\underline{r=3}$: v_1, v_2, v_3 libre $\longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

  dim $= 3$



$\square$

Ex: 6 (suite)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \det A = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 = -2C_1 - C_2$

pas proport.

$\Rightarrow rg(A) = 2$

$\Rightarrow rg(f) = 2$

$\Rightarrow Im(f)$ est un <u>plan</u>

Mais on peut en dire plus...

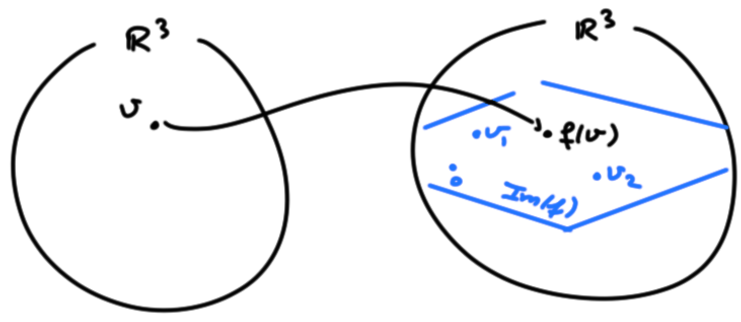
$$= \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & -2C_1 - C_2 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -1)$$

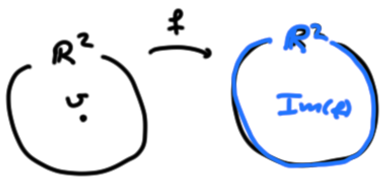
$$\Rightarrow f(v) = f((x,y,z)) = (x-2z)\underbrace{(-2,1,1)}_{f(e_1) = v_1} + (y-z)\underbrace{(3,1,-4)}_{f(e_2) = v_2}$$

pas proport.

$\Rightarrow Im(f) = Vect(v_1, v_2)$



③ (suite) $\quad f(x,y) = (x-y, -x+2y) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



pas proport. $\rightarrow rg(A) = 2$

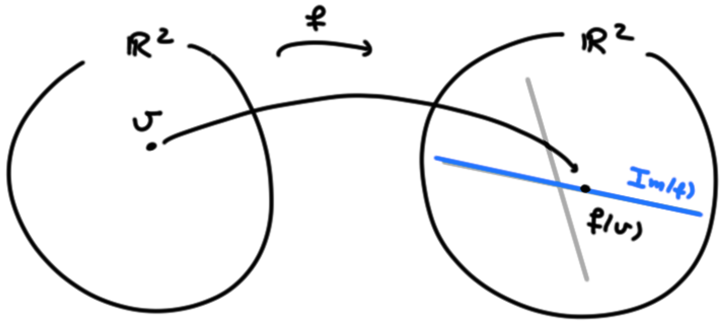
$\rightarrow rg(f) = 2$

$\Rightarrow Im(f) = \mathbb{R}^2$

④ (suite) $f((x,y)) = (x,0)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow rg(A) = 1$

$\rightarrow$ Im(f) est une droite

$= x e_1 \rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1) = Ox.$

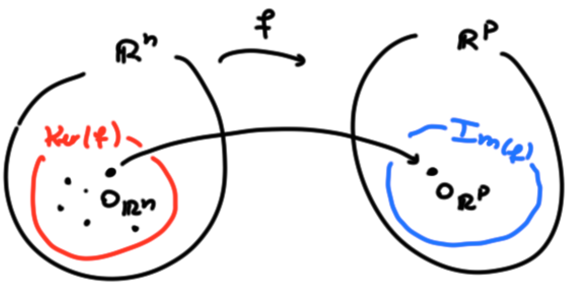


<u>Rappel:</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est <u>linéaire</u> ssi $\exists\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$v = (x, y) \longmapsto f(v) = (ax + by, cx + dy)$$

$$[f(v)]_{\mathcal{B}can} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\ [v]_{\mathcal{B}can}$$

<u>Rem:</u> Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors $f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^p}$



donc $0_{\mathbb{R}^p} \in Im(f)$

<u>Déf:</u> Le <u>noyau de</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (linéaire) est

$$Ker(f) := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^p} \} \subset \mathbb{R}^n$$

"kernel", c'est toutes les préimages de $0_{\mathbb{R}^p}$

<u>Rem:</u> • $Ker(f) \neq \emptyset$ puisque $0_{\mathbb{R}^n} \in Ker(f)$.

• Dans la base canonique, $v \in Ker(f)$ ssi

$$[f(v)]_{\mathcal{B}can} = A\,[v]_{\mathcal{B}can} = [0_{\mathbb{R}^p}]_{\mathcal{B}can} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} p$$

$$A\,[v]_{\mathcal{B}can} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Théorème:</u> $Ker(f) \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, <u>de dimension $n - r$</u>, où $r = rg(f)$.

↳ c'est le Théorème du rang: $\dim(Ker f) + \dim(Im f) = n$

Preuve : Prenons $n = p = 3$. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire, de matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$ en base canonique.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ v = (x,y,z)}}{v \in \mathrm{Ker}(f)} \iff A\,[v]_{B_{can}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (*) \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \\ gx + hy + iz = 0 \end{cases}$$

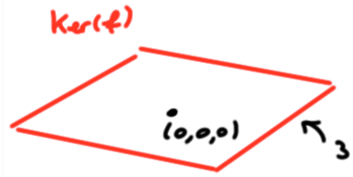
Rappel : $rg(A)$ $(= rg(f))$ mesure les dépendances linéaires entre les lignes de A, donc entre les 3 équations de $(*)$

Cas $r=0$: $a = b = c = d = e = f = g = h = i = 0$

$\Rightarrow$ Tout $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution de $(*)$.

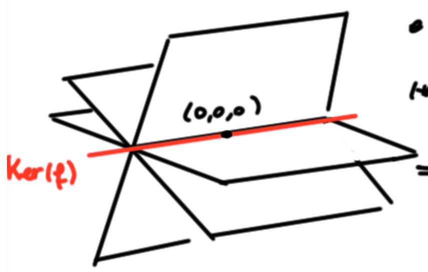
$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$, $\dim(\mathrm{Ker} f) = 3 = \overset{n}{3} - \overset{r}{0}$

Cas $r=1$: Les 3 lignes de A sont proportionnelles 2 à 2, donc $(*)$ ne contient qu'une seule équation.



$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(f)$ est un $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vectoriel}}}{\text{plan}}$, et $\dim(\mathrm{Ker} f) = 2 = \overset{n}{3} - \overset{r}{1}$

Cas $r = 2$: Dans $(*)$, deux équations sont non-proportionnelles, et la dernière est combin. lin. des deux autres. Donc $(*)$ ne contient que 2 équations

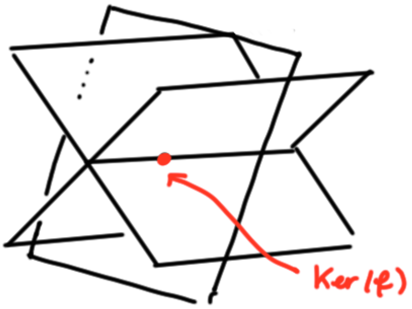


$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(f)$ est une intersection de 2 plans$^{\vee}$ (Vectoriels), donc c'est une $\underset{\text{vectorielle}}{\text{droite}}$, $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1 = 3 - 2$.

Cas $r = 3$: $\mathrm{Ker}(f)$ est une intersection de 3 plans, dont l'intersection est le point : $(0,0,0)$.

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}, \quad \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 0 = \underset{n}{3} - \underset{r}{3}$$

$\square$ (CQFD)



(l'intersection des 3 plans ne contient que $(0,0,0)$)

<u>Ex</u>: ① $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x+3y,\ 2x+6y)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \cdot 3 \quad \to \det(A) = 0, \text{ et } rg(A) = 1$$

$\to \overset{r}{rg}(f) = 1$, et comme

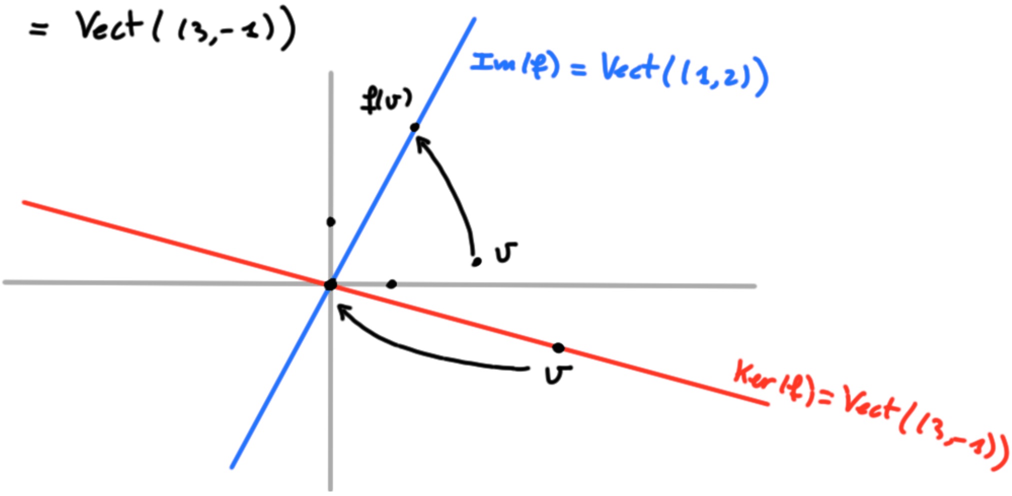
$$f((x,y)) = (x+3y)\underset{v_1}{(1,2)} \quad , \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,2))$$

$\mathrm{Ker}(f)$ doit avoir dimension $\overset{n}{2} - \overset{r}{1} = 1$. En effet, on peut

calculer : $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y) : f((x,y)) = 0\} = \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases}$

$= \{ x + 3y = 0$

$= \mathrm{Vect}((3,-1))$



② $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (-2x+3y+z,\ x+y-3z,\ x-4y+2z)$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \end{array}$$

$\det(A) = 0 \xrightarrow{} rg(A) < 3$, car $L_1 = -L_3 - L_2$

Comme L_2 et L_3 ne sont pas proport., $rg(A) = 2 \to rg(f) = 2$

$\to$ $Im(f)$ est un plan vectoriel

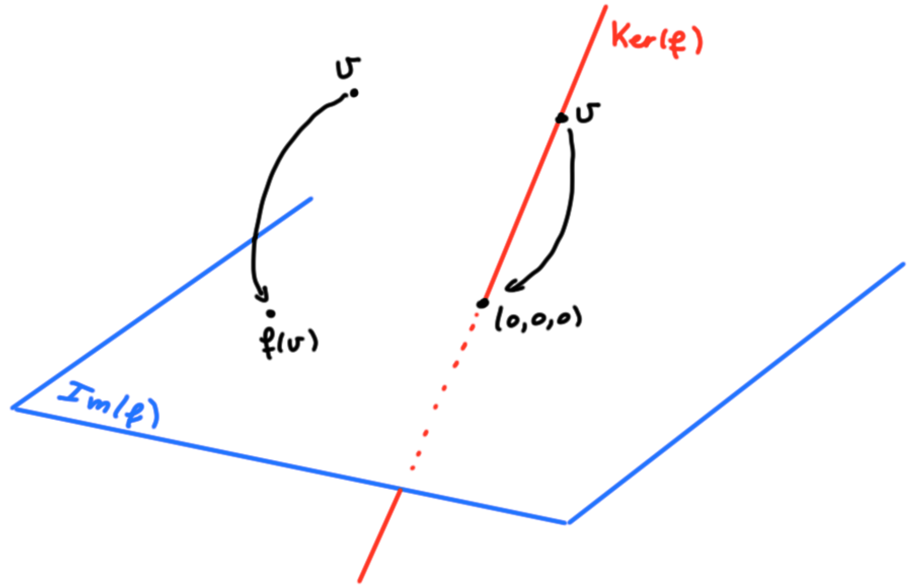
$\underset{\text{rang}}{\overset{\text{Th.}}{\to}}$ $Ker(f)$ a dim. $3-2 = 1$, donc c'est <u>une droite vectorielle.</u>

↑ quelle droite ?

$Ker(f)$: $\begin{cases} \cancel{-2x+3y+z} = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$

$\Rightarrow Ker(f) = \{(2z, z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = Vect((2,1,1))$



Décompositions colonne-ligne minimales

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est linéaire, de matrice $A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ (en base can.), et si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = r \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$, on sait qu'on peut écrire une décomposition col.-ligne minimale de A :

$$A = \underset{p \times 1}{C_1}\,\underset{1 \times n}{L_1} + C_2 L_2 + \cdots + C_r L_r$$

Cette décomp. permet de réécrire $f(v)$ de façon particulière.

Par exemple, dans le cas $n = p = 3$: $C_i \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $C_i = [v_i]_{B_{can}}$

$L_i \in M_{1,3}(\mathbb{R})$

$$A = C_1 \underset{(\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1)}{L_1} + \cdots + C_r \underset{(\alpha_r\ \beta_r\ \gamma_r)}{L_r}$$

$$[f(v)]_{B_{can}} = A\, \underbrace{[v]_{B_{can}}}_{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \qquad v = (x, y, z)$$

$$f(v) = f((x,y,z)) = (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)\, v_1 + \cdots + (\alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z)\, v_r$$

Image de f : $\underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{\dim = r} \subset \underbrace{\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r)}_{\dim \leq r} \Rightarrow \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ a dim r !

$f(v) = 0$?

Noyau de f ? Considérons le système suivant

$$(*)\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z=0\\ \vdots\\ \alpha_r x+\beta_r y+\gamma_r z=0\end{array}\right. \quad \longleftarrow \text{ solutions : } S$$

Deux choses : 1) la dim de S est $\geq 3-r$

2) Si $v=(x,y,z)\in S$, alors $f(v)=0v_1+\dots+0v_r$
$=0$,

donc $v\in \mathrm{Ker}(f)$.

$$\Rightarrow \underbrace{S}_{\dim\geq 3-r} \subset \underbrace{\mathrm{Ker}(f)}_{\dim = 3-r}$$

$\Rightarrow S$ a $\dim = 3-r$, et $S=\mathrm{Ker}(f)$

Donc $(*)$ est un jeu d'équations qui décrit exactement le noyau.

Donc

$$\boxed{A = C_1L_1 + C_2L_2 + \dots + C_rL_r \quad (\underline{\text{minimale}})}$$

base de $\mathrm{Im}(f)$

jeu d'équations pour $\mathrm{Ker}(f)$

__Exemples:__ ① $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\1&1&-3\\1&-4&2\end{pmatrix}\begin{array}{l}-L_3-L_2\\L_2\\L_3\end{array}$ pas proport.

$r=\mathrm{rg}(A)=2$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}-L_2\\L_2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-L_3\\0\\L_3\end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{C_1}\underbrace{(1\ \ 1\ \ -3)}_{L_1}+\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{C_2}\underbrace{(1\ \ -4\ \ 2)}_{L_2}\quad (\text{minimale !})$$

Donc $\forall\, v = (x,y,z)$,

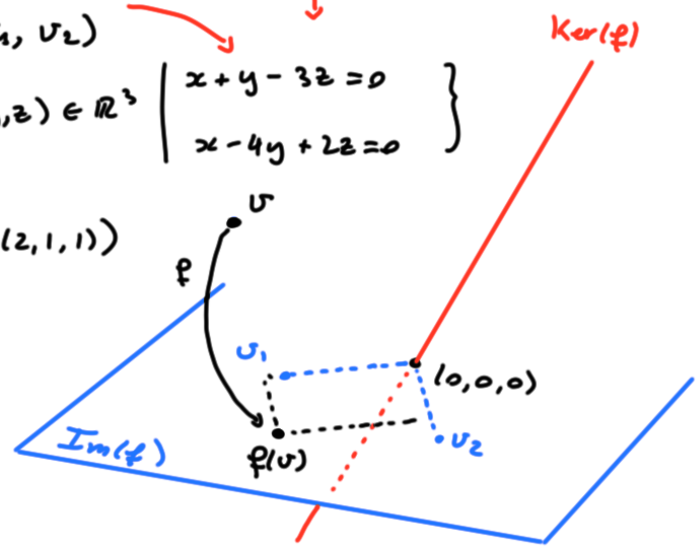
$$f(v) = (x+y-3z)\underbrace{(-1,1,0)}_{v_1} + (x-4y+2z)\underbrace{(-1,0,1)}_{v_2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x+y-3z=0 \\ x-4y+2z=0 \end{array} \right\}$$

voir plus haut

$$= \mathrm{Vect}((2,1,1))$$



Attention: Si la décomp. de A n'est <u>pas</u> minimale, ça ne marche pas!

<u>Ex:</u> On aurait aussi pu écrire

$$f(v) = x\underbrace{(-2,1,1)}_{\tilde{v}_1} + y\underbrace{(3,1,-4)}_{\tilde{v}_2} + z\underbrace{(1,-3,2)}_{\tilde{v}_3}$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$, mais $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3$ n'est <u>pas</u> une base de $\mathrm{Im}(f)$

De plus, le système

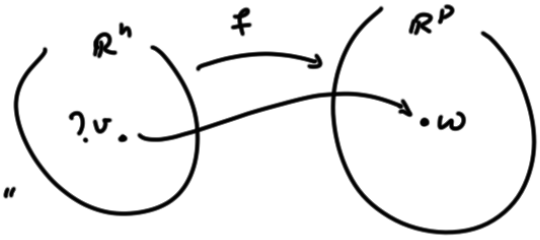
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$ ne décrit pas tout $\mathrm{Ker}(f)$!

Dès mercredi prochain: BS 270 (toutes les séances d'exercices)

<u>But</u>: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire, étudier l'équation

$$(*) \quad \boxed{f(v) = w}$$

"target"
"second membre"



- Si $w \notin \mathrm{Im}(f)$, $(*)$ n'a pas de sol.
- Si $w \in \mathrm{Im}(f)$, $(*)$ possède au moins une sol.
- Si $w = 0_{\mathbb{R}^p}$, alors les $\{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = 0\} = \mathrm{Ker}(f)$
- $\mathrm{Im}(f) = \{w \in \mathbb{R}^p \mid (*) \text{ possède au moins une solution.}\}$

<u>Un cas particulier: lorsque f est inversible</u>

<u>Déf</u>: Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, linéaire, de matrice A. Si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = n$, (alors A est inversible : A^{-1} existe), on définit

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \text{en l'associant à } A^{-1},$$

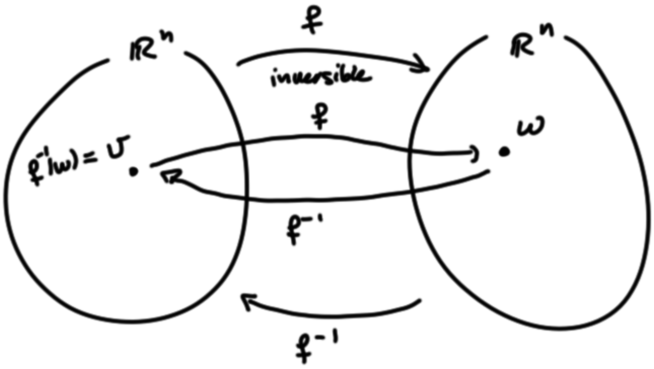
c.à.d.

$$[f^{-1}(v)]_{\mathcal{B}can} = A^{-1} [v]_{\mathcal{B}can}$$

f^{-1} est l'<u>inverse de</u> f (ou <u>réciproque</u>).

f^{-1} satisfait:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f^{-1}(f(v)) = v & \forall v \in \mathbb{R}^n \\ f(f^{-1}(w)) = w & \forall w \in \mathbb{R}^n \end{array}}$$



Ex: (1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (2x - y,\ x + y)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) \overset{3}{\overset{\shortparallel}{\neq}} 0$,

$\Rightarrow$ inversible

$\Rightarrow f^{-1}$ inversible aussi

$$\Big\downarrow$$

$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \longleftarrow \quad$ $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$(x,y) \longmapsto \left(x/3 + y/3,\ -x/3 + 2y/3\right)$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (-x + 2y,\ x/2 - y)$

n'est pas inversible

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$

Dans un cas plus général, comment résoudre $(*)$ $f(v) = w$?

Déf : Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, et si $w \in \mathbb{R}^p$, on appelle <u>ensemble des antécédents</u>

$$f^{-1}(\{w\}) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = w\} \subset \mathbb{R}^n$$

Rem :
- ⚠ "$f^{-1}(\{w\})$" est bien défini, même si f n'est pas inversible !
- Si $w \notin \mathrm{Im}(f)$, $f^{-1}(\{w\}) = \emptyset$

- Si $w = 0_{\mathbb{R}^p}$, $f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^p}\}) = \mathrm{Ker}(f)$

- Si $n = p$, et si f est inversible,

$$\underbrace{f^{-1}(\{w\})}_{\text{notation !}} = \underbrace{\{f^{-1}(w)\}}_{\text{l'ens. contenant l'unique antéc. de } w.}$$

- $f^{-1}(\{w\})$ se calcule comme suit

$$v \in f^{-1}(\{w\}) \iff f(v) = w$$

$$\iff [f(v)]_{B_{can}} = \underbrace{A\,[v]_{B_{can}} = [w]_{B_{can}}}_{\text{système. } "A\vec{x} = \vec{b}"}$$

Théorème: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire, alors

$$f^{-1}(\{w\}) \begin{cases} \text{est } \emptyset \text{ si } w \notin \mathrm{Im}(f) \\ \text{est un translaté de } \mathrm{Ker}(f) \quad \text{si } w \in \mathrm{Im}(f) \end{cases}$$

Preuve: Soit $w \in \mathrm{Im}(f)$. $\Rightarrow f^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \exists\, v_0 \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(v_0) = w$.

Soit $v \in f^{-1}(\{w\})$. On a

$$f(v) = w \iff f(v) = f(v_0)$$

$$\iff f(v) - f(v_0) = 0$$

$$\iff f(v - v_0) = 0 \qquad \Big\} \ f \text{ linéaire !}$$

$$\iff v - v_0 \in \mathrm{Ker}(f) \iff \exists\, v_1 \in \mathrm{Ker}(f) \text{ t.q. } v - v_0 = v_1$$

Donc $f^{-1}(\{w\}) = v_0 + \mathrm{Ker}(f)$ $\square$ $\quad v = v_0 + v_1$

Ex: (1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (-x + 2y,\ x/2 - y)$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad \det A = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(f) < 2$$

Étudions $f^{-1}(\{w\})$ en fonction de $w \in \mathbb{R}^2$

Comme $v = (x,y)$, $f(v) = (x-2y)(-1, 1/2)$

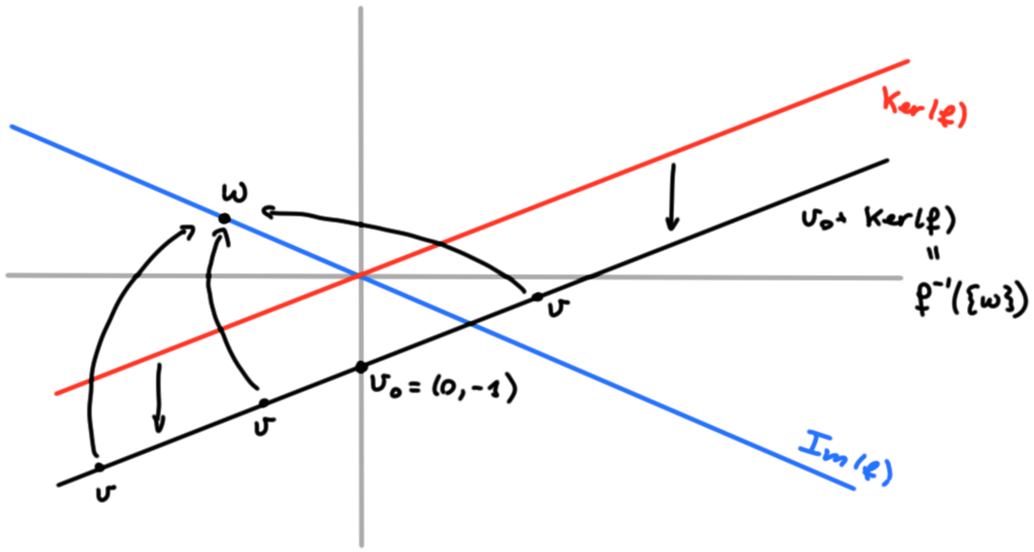
$\rightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1/2))$

$\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 0\} = \mathrm{Vect}((2,1))$

- Si $w \notin \mathrm{Vect}((-1, 1/2))$, $f^{-1}(\{w\}) = \emptyset$
- Si $w \in \mathrm{Vect}((-1, 1/2))$, $f^{-1}(\{w\}) = \underbrace{\underset{\uparrow \text{ à choisir}}{v_0} + \mathrm{Vect}((2,1))}_{\text{droite affine}}$

P. ex : $f(v_0) = (x_0 - 2y_0)(-1, 1/2) = (-2, 1) = w$ $\in \mathrm{Vect}(-1, 1/2)$

$\rightarrow$ $v_0 = (0, -1)$



Cas général : $w \in \mathrm{Im}(f) \implies w = a(-1, 1/2)$, $v_0 = (0, -a/2)$,

$f^{-1}(\{w\}) = (0, -a/2) + \mathrm{Vect}((2,1))$

② $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$v = (x,y,z) \longmapsto (2x+y-3z,\ 0,\ 4x+2y-6z) = f(v)$

Fixons $w \in \mathbb{R}^3$, étudions $f^{-1}(\{w\})$.

$\mathrm{Im}(f)$? Posons $w = (a,b,c)$. Si $v = (x,y,z)$, on a

$$f(v) = w \iff \begin{cases} 2x+y-3z = a \\ 0 = b \\ 4x+2y-6z = c \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y-3z = a \\ 0 = b \\ 0 = c-2a \end{cases}$$

Donc v est sol. seulement si $b=0$, $c=2a$, donc w est de la forme

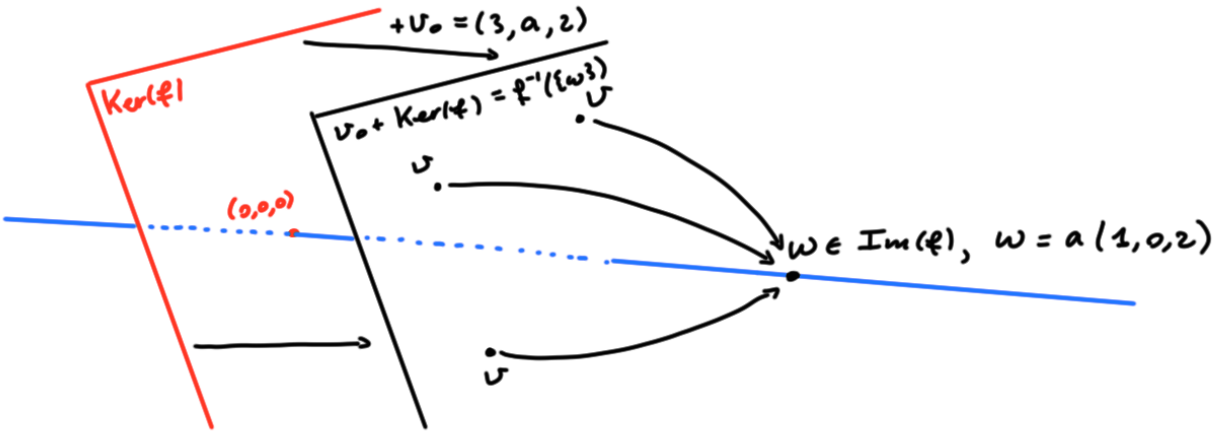
$$w = (a,0,2a) = a(1,0,2) \quad \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,0,2))$$

$\rightarrow$ On a alors : $f^{-1}(\{w\}) = \{v = (x,y,z) \mid f(v) = w = a(1,0,2)\}$

$$= \{v = (x,y,z) \mid 2x+y-3z = a\}$$

$$= \underbrace{(3,a,2)}_{v_0} + \mathrm{Ker}(f)$$

$$= \underbrace{(3,a,2) + \{(x,y,z) : 2x+y-3z = 0\}}_{\text{plan affine}}$$



Déterminant et aire orientée sous l'effet d'une application linéaire

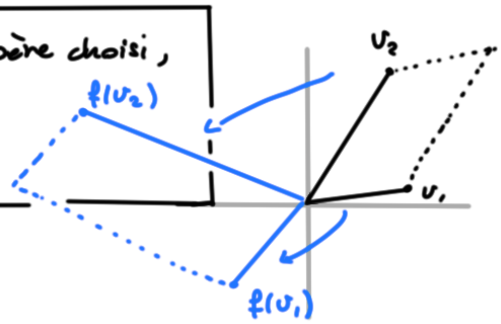
Déf: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire, de matrice A (en base can.), son <u>déterminant</u> est

$$\det(f) := \det(A)$$

mesure comment se transforment des volumes sous l'action de f.

<u>Cas $n=2$:</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, linéaire

> <u>Théorème</u> $(n=2)$ $\forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, dans un repère choisi,
>
> $$\sigma(f(v_1), f(v_2)) = \det(f) \cdot \sigma(v_1, v_2)$$



<u>Preuve:</u> Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice (en b. can.).

Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$

<u>Décomposons:</u> v_1, v_2 dans $\mathcal{B}_{can}$:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x_1 e_1 + y_1 e_2, \\ v_2 &= x_2 e_1 + y_2 e_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (v_1 \;\; v_2) = (e_1 \;\; e_2) \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}}_{=:P}$$

$$f(v_1) = (ax_1 + by_1,\ cx_1 + dy_1)$$

$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= (ax_1 + by_1) e_1 + (cx_1 + dy_1) e_2 \\ f(v_2) &= (ax_2 + by_2) e_1 + (cx_2 + dy_2) e_2 \end{aligned}\right\}$$

$$(f(v_1) \;\; f(v_2)) = (e_1 \;\; e_2) \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

$$= (e_1\ e_2)\underbrace{AP}_{P'}$$

Par le Théorème déjà démontré,

$$\sigma(f(v_1), f(v_2)) = \det(AP)\,\sigma(e_1, e_2)$$
$$= \overbrace{\underbrace{\det(A)}_{\det(f)} \cdot \underbrace{\det(P)\,\sigma(e_1, e_2)}_{\sigma(v_1, v_2)}}$$

par le même théorème

$\square$

Aujourd'hui : BS270

À propos de la Série 8...

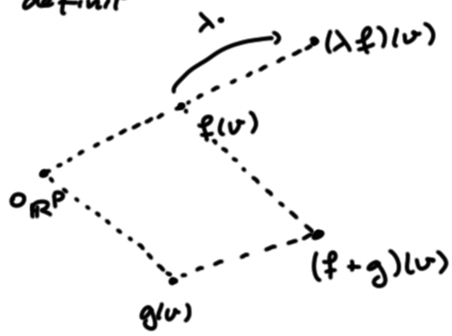
Notation pour aujourd'hui : $\boxed{\text{"} f \rightsquigarrow A \text{"}}$ signifie "A est la matrice associée à f en base canonique"

__Structure vectorielle sur les applications linéaires__

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit

1) $\lambda f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$
$$v \longmapsto (\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$$

2) $f+g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$
$$v \longmapsto (f+g)(v) := f(v) + g(v)$$



__Lemme__:

Si f, g sont linéaires, $f \rightsquigarrow A$, $g \rightsquigarrow B$, alors

$\in M_{p,n}(\mathbb{R})$.

1) λf est linéaire, et $\lambda f \rightsquigarrow \lambda A$.

2) $f+g$ est linéaire, et $f+g \rightsquigarrow A+B$

__Preuve__: 1) Soient $v, v' \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\alpha v + \alpha' v') &= \lambda \cdot f(\alpha v + \alpha' v') \\ &= \lambda \cdot \left(\alpha f(v) + \alpha' f(v')\right) \quad \} \ f \text{ linéaire} \\ &= \alpha \cdot \underbrace{\lambda \cdot f(v)} + \alpha' \cdot \underbrace{\lambda \cdot f(v')} \\ &= \alpha (\lambda f)(v) + \alpha' (\lambda f)(v')\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda f$ linéaire. Sa matrice ?

$$[(\lambda f)(v)]_{B_{can}} = [\lambda \cdot f(v)]_{B_{can}} = \lambda\left(A\,[v]_{B_{can}}\right)$$

$$= \underbrace{(\lambda A)}_{\lambda f}\,[v]_{B_{can}}.$$

2) Pareil. $\square$

<u>Question:</u> Comment se comportent Im, Ker, rg, det sous ces transformations (" $f \longrightarrow \lambda f$ ", " $f, g \longrightarrow f+g$ ")

<u>Proposition:</u> Soient $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ linéaires, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) $$\text{rg}(\lambda f) \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{rg}(f) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

2) $$\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

<u>Preuve:</u> 1) $\text{Im}(\lambda f) = \{ \lambda \cdot f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n \}$

$$= \begin{cases} \text{Im}(f) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \{0_{\mathbb{R}^p}\} & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq 0$; en "balayant" $\mathbb{R}^n$ avec v, $\lambda f(v)$ parcourt le même sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$ que $f(v)$

2) Supposons que $\text{rg}(f) = r$, $\text{rg}(g) = q$, et que

$$\left.\begin{array}{l} f \leadsto A = C_1 L_1 + \cdots + C_r L_r \\ g \leadsto B = C_1' L_1' + \cdots\cdots + C_q' L_q' \end{array}\right\} \text{décomp. col./ligne minimales.}$$

$$\Rightarrow f+g \leadsto A+B = C_1 L_1 + \cdots + C_r L_r + C_1' L_1' + \cdots + C_q' L_q'$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{}$$

$r+q$ termes, mais on ne sait pas si cette décomposition est minimale ou pas.

Donc $\mathrm{rg}(A+B) \leq r+q$.

$\Rightarrow \mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. $\square$

Rem : Il n'y a pas de résultat général pour exprimer

- $\mathrm{Im}(f+g)$ en fonction de $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$
- $\mathrm{Ker}(f+g)$ " " " $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$
- $\det(f+g)$ " " " $\det(f)$ et $\det(g)$

sauf si f et g sont proportionnelles, c.à.d. $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $g = \alpha f$

↳ par contre : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)}$$

Exemples : $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

- $\underset{f}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{g}{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} = \underset{f+g}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$

  $\mathrm{rg}=1$, $\det=0$; $\mathrm{rg}=1$, $\det=0$; $\mathrm{rg}=2$, $\det=-2$

  Ici : $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f+g)$

  $\det(f) + \det(g) \neq \det(f+g)$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{rg}=1$, $\det=0$; $\mathrm{rg}=1$, $\det=0$; $\mathrm{rg}=1$, $\det$ 0

  Ici : $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) > \mathrm{rg}(f+g)$

  $\det(f) + \det(g) = \det(f+g)$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{rg}=1$, $\det=0$; $\mathrm{rg}=2$, $\det=-2$; $\mathrm{rg}=1$, $\det=0$

  Ici : $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) > \mathrm{rg}(f+g)$

  $\det(f) + \det(g) \neq \det(f+g)$

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  rg = 2   rg = 2   rg = 0

  det = −2   det = −2   det 0

Ici : {

Composition d'applications

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. On peut les composer :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^p \arrow[r] & \mathbb{R}^q \\
v \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & f(v) \arrow[r, mapsto] & g(f(v)) =: (g \circ f)(v)
\end{tikzcd}$$

50min

$$g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$$
$$v \longmapsto (g \circ f)(v) := g(f(v))$$

Proposition : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ sont linéaires, alors

$g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est linéaire. ← vérifiez !

De plus, si $f \rightsquigarrow A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

$g \rightsquigarrow B \in M_{q,p}(\mathbb{R})$, alors

$$g \circ f \rightsquigarrow BA$$

Preuve : cas $n = p = q = 2$. $f \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $g \rightsquigarrow B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, et

$$g(x,y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \text{ , donc}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x,y) &= g(f(x,y)) \\ &= (\alpha(ax+by) + \beta(cx+dy), \gamma(ax+by) + \delta(cx+dy)) \\ &= ((\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y, (\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y)\end{aligned}$$

Donc

$$g \circ f \leadsto \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A}$$

<u>Question:</u> Comment se comportent Im, Ker, rg, det sous les compositions ?

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^p \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

<u>Proposition:</u> $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$

est un "=" si f est inversible $(n=p)$

<u>Preuve:</u> Version 1): Montrons que $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$

Soit $w \in \text{Im}(g \circ f)$. $\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $(g \circ f)(v) = w$

Donc $w = g(\underbrace{f(v)}_{\mathbb{R}^p}) \Rightarrow w \in \text{Im}(g)$

$\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$

Si f est inversible : montrons que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g\circ f)$.

Soit $w \in \mathrm{Im}(g) \Rightarrow \exists\, v' \in \mathbb{R}^p$ t.q. $g(v') = w$.

Puisque f est inversible, $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(v) = v'$

Donc $w = g(v') = g(f(v)) = (g\circ f)(v)$

$\Rightarrow w \in \mathrm{Im}(g\circ f)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(g\circ f)$

Donc si f est inversible, $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}(g)$, donc $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(g)$. $\square$

Version 2) : $\mathbb{R}^n \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}^p \xrightarrow[g]{} \mathbb{R}^q$

$f \leftrightsquigarrow A$, $g \leftrightsquigarrow B = C_1L_1 + \cdots + C_rL_r$, où $r = \mathrm{rg}(g)$

décomp. minimale.

On sait que

$$g\circ f \rightsquigarrow BA = (C_1L_1 + \cdots + C_rL_r)A$$

$$= \underbrace{C_1(\underbrace{L_1A}_{=L_1'}) + \cdots + C_r(\underbrace{L_rA}_{=L_r'})}$$

une décomp. col./lignes de BA, mais on ne sait pas si elle est minimale.

$$(*) \rightarrow \mathrm{rg}(BA) \leq \overset{\mathrm{rg}(B)}{\overset{\shortparallel}{r}} \Rightarrow \mathrm{rg}(g\circ f) \leq \mathrm{rg}(g).$$

Si f est inversible, c.à.d. que A est inversible, alors

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B(AA^{-1})) = \mathrm{rg}(\underbrace{(BA)}_{\tilde{B}}\underbrace{A^{-1}}_{\tilde{A}})$$

montré en $(*)$

$$\leq \mathrm{rg}(\tilde{B}) = \mathrm{rg}(BA)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(B)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g) \qquad \square$$

On peut démontrer, de même : (prendre la "Version 2")

Proposition : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$

avec "=" si g inversible

Théorème : $(n = p = q)$ $\quad f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\det(g \circ f) = \det(g) \cdot \det(f)$$

Preuve: On a vu en exercice que si $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, alors

$$\det(BA) = \det(B) \det(A)$$

Cas général : $n \geq 3$:

$(\square)$

Jusqu'ici : 1. Calcul matriciel
2. Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$
3. Applications linéaires $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$

---

4. Transformations géométriques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

projections, symétries, rotations, réflexions, ...

Projections (pas forcément orthogonales !)

Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire

Déf: On dit que f est une projection si $\boxed{f \circ f = f}$

Rem : • Si $f \rightsquigarrow A$, et si f est une projection, alors $\boxed{A^2 = A}$

(A est appelée matrice de projection.)

$a^2 = a \iff a(a-1) = 0$

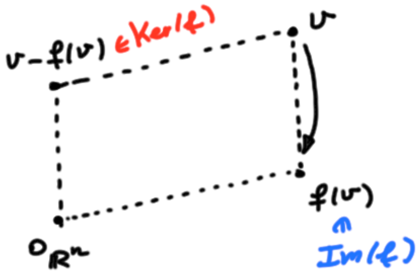
• Pourquoi "projection" ?

Proposition : Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une projection, alors $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

$$v - f(v) \in \operatorname{Ker}(f).$$

On peut donc toujours décomposer un $v \in \mathbb{R}^n$ comme suit:

$$v = \underbrace{f(v)}_{\in \operatorname{Im}(f)} + \underbrace{(v - f(v))}_{\in \operatorname{Ker}(f)}$$



Preuve: En effet, $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

$$f(v - f(v)) \underset{f \text{ lin.}}{=} f(v) - \underbrace{f(f(v))}_{\text{car } f \text{ projection}}$$

$$= f(v) - f(v)$$

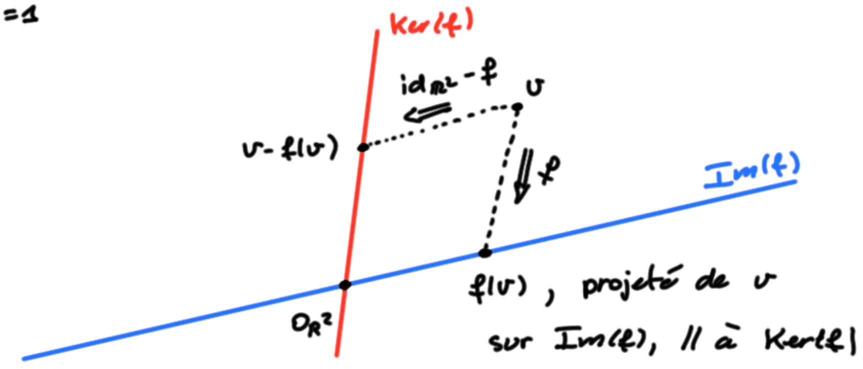
$$= 0_{\mathbb{R}^n} \implies v - f(v) \in \operatorname{Ker}(f) \qquad \square$$

Interprétation géométrique : Soit $r := rg(f)$

Dans $\mathbb{R}^2$: **Si $r=0$:** $f=0$ (rien à interpréter)

Si $r=1$: $\Rightarrow$ $Im(f)$ est une droite vect.

$\xRightarrow[2-1=1]{\text{Th. Rang}}$ $Ker(f)$ est une droite vect.



Si $r=2$: $Im(f) = \mathbb{R}^2$

$\xRightarrow[2-2=0]{\text{Th. Rang}}$ $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

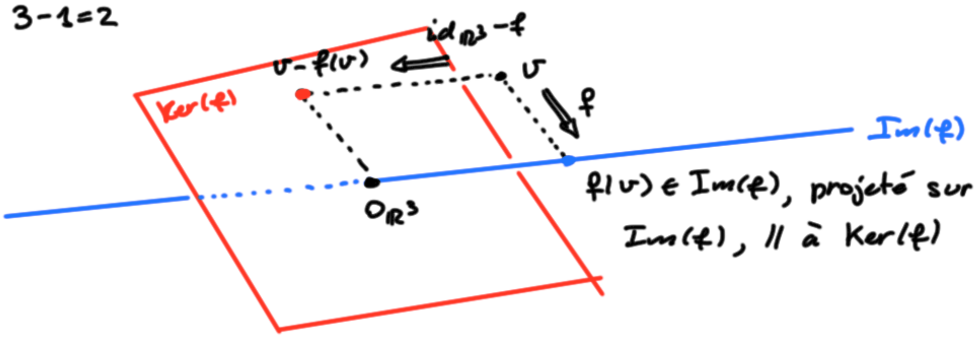
Donc $\forall\, v \in \mathbb{R}^2$, $v - f(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$,

c.à.d. $f(v) = v$: $\boxed{f = id_{\mathbb{R}^2}}$ $\rightsquigarrow$ $A = I_2$

Dans $\mathbb{R}^3$: **Si $r=0$:** $f=0$ "ok"

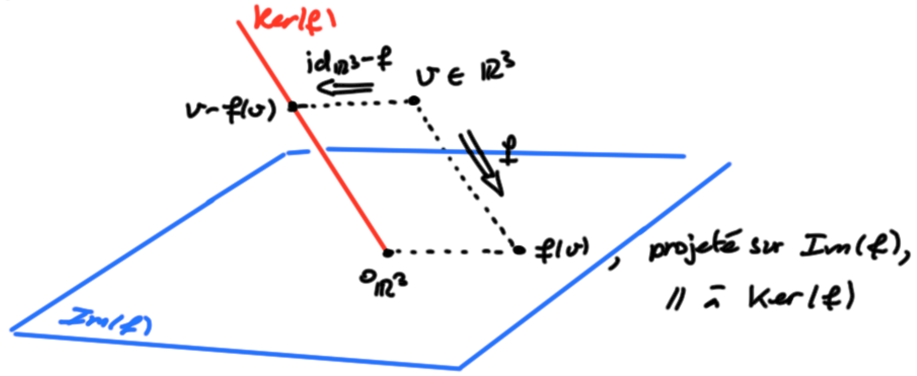
Si $r=1$: $\Rightarrow$ $Im(f)$ est une droite vect.

$\xRightarrow[3-1=2]{\text{Th. Rang}}$ $Ker(f)$ est un plan vect.



Si $r=2$: $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(f)$ est un plan vect.

$\overset{\text{Th. Rang}}{\underset{3-2=1}{\Longrightarrow}}$ $\mathrm{Ker}(f)$ est une droite vect.



Si $r=3$: $f = id_{\mathbb{R}^3}$ (comme avant)

> **Conclusion** : Si f est une projection, elle se visualise comme une projection géométrique sur $\mathrm{Im}(f)$, selon une direction // à $\mathrm{Ker}(f)$

Remarque : Si f est une projection, alors l'application linéaire

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^n} - f \ &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ & v \longmapsto (id_{\mathbb{R}^n} - f)(v) = v - f(v) \end{aligned}$$

est aussi une projection puisque $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \big(\underbrace{(id_{\mathbb{R}^n} - f)}_{g} \circ \underbrace{(id_{\mathbb{R}^n} - f)}_{g}\big)(v) &= (id_{\mathbb{R}^n} - f)(v - f(v)) \\ &= (v - f(v)) - \underbrace{f(v - f(v))}_{f(v) - f(f(v))} \\ &= v - 2f(v) + \underbrace{f(f(v))}_{f(v) \text{ car } f \text{ proj.}} \\ &= v - f(v) \\ &= (id_{\mathbb{R}^n} - f)(v) = g(v) \end{aligned}$$

On a donc $\quad \mathrm{Im}(id_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{Ker}(f)$

$$\mathrm{Ker}(id_{\mathbb{R}^n} - f) = \mathrm{Im}(f)$$

Géométriquement $id_{\mathbb{R}^n} - f$ projette sur $\mathrm{Ker}(f)$, selon une direction // à $\mathrm{Im}(f)$

Exemples :

① $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) := \left(\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y, \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y\right) \qquad A = \begin{pmatrix} 6/7 & 2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$

On a : $A^2 = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 42 & 14 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 & 2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix} = A$

Donc f est une projection. Calculons ses éléments caractéristiques

sur quoi on projette, selon quelle direction ?

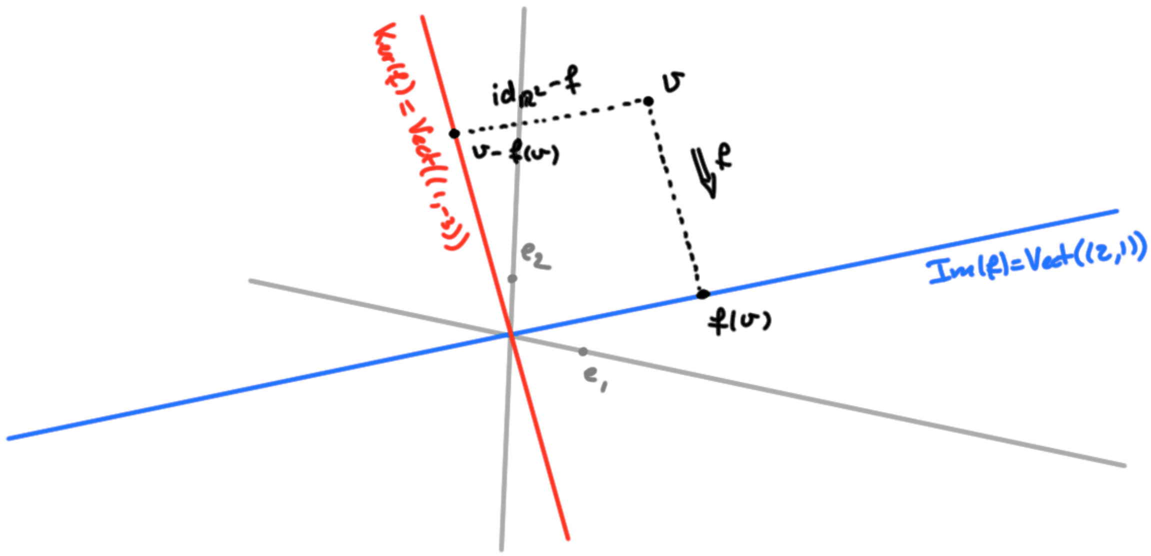
Comme $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(3 \;\; 1) \longrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((2,1))$

$\cdot 3$

$(rg(A) = 1)$

$\mathrm{Ker}(f) = \{3x + y = 0\}$

$= \mathrm{Vect}((1,-3))$



Remarquons que $id_{\mathbb{R}^2} - f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (x,y) - f(x,y) = \left(\tfrac{1}{7}x - \tfrac{2}{7}y, -\tfrac{3}{7}x + \tfrac{6}{7}y\right)$$

49min

② $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (y+z, x-z, -x+y+2z) \qquad A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ C_1 \quad C_2 \quad C_3 \\ \qquad\qquad \| \\ \qquad\qquad C_2 - C_1 \end{array}$$

On a : $A^2 = A \implies f$ est une projection.

$rg(f) = 2$ (colonnes de A ne sont pas 2 à 2 proport.)

Éléments caractéristiques : $\left.\begin{array}{l} Im(f), \text{ un plan vect.} \\ Ker(f), \text{ une droite vect.} \end{array}\right\}$ calculons les !

Version 1 :

$$A = (C_1 \vdots C_2 \vdots C_2 - C_1) = C_1 (1 \; 0 \; -1) + C_2 (0 \; 1 \; 1)$$

base de Im(f)

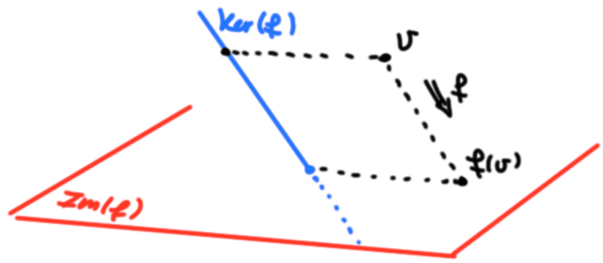
jeu minimal d'éq. pour Ker(f)

$$\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\implies Im(f) = Vect((0,1,-1),(1,0,1)) = \{x - y - z = 0\}$$

$$Ker(f) = \begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} = Vect((1,-1,1))$$

Donc f est la projection sur le plan $Im(f)$, selon la direction // à la droite $Ker(f)$.



Version 2: Passons par $id_3 - f \rightsquigarrow I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad \tilde{C}_3$

prop. 2 à 2 $\to rg = 1$!

$$\to I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

base de $\mathrm{Im}(id_{\mathbb{R}^3} - f)$

jeu d'éq. pour $\mathrm{Ker}(id_{\mathbb{R}^3} - f)$

$$\mathrm{Im}(id_{\mathbb{R}^3} - f) = \mathrm{Vect}((1,-1,1)) = \mathrm{Ker}(f) \quad (!)$$

$$\mathrm{Ker}(id_{\mathbb{R}^3} - f) = \{x - y - z = 0\} = \mathrm{Im}(f) \quad (!)$$

Applications de Rang = 1

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire, $f \rightsquigarrow A$

Déf: La trace de f est la somme des éléments diagonaux de A.

On note : $\mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$ $\qquad A = [\alpha_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$.

Ex: $f(x,y) = (ax + by, cx + dy) \to \mathrm{tr}(f) = \mathrm{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$

> **Théorème** Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est lin. de rang 1, alors
>
> $$f \circ f = \lambda f, \quad \text{où } \lambda = \mathrm{tr}(f)$$

Preuve: $n = 3$. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f \rightsquigarrow A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

Étant de rang 1, A peut s'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & \nu & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mu & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta\nu & \cdot \\ \cdot & \cdot & \gamma\sigma \end{pmatrix}$$

On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\underbrace{(\mu\ \nu\ \sigma)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}}_{=\mu\alpha+\nu\beta+\sigma\gamma = tr(A)}(\mu\ \nu\ \sigma) = \underbrace{tr(A)}_{\lambda}\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}(\mu\ \nu\ \sigma)}_{A}$$

$\square$

<u>Corollaire</u> : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire, de rang 1, et $tr(f) = 1$, alors c'est une projection.

pas besoin de vérifier que "$f \circ f = f$", "$A^2 = A$"

<u>Ex</u>: ① $f(x,y) = \left(\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y, \frac{3}{7}x + \frac{1}{7}y\right)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 6/7 & 2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$

$\cdot 3$

$tr(f) = 1$
$\Rightarrow rg(f) = 1$

$\Rightarrow$ f est une project.

② (m̂ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ d'avant)

$id_{\mathbb{R}^3} - f \rightsquigarrow I_3 - A$ était de rang 1,

$tr(I_3 - A) = 1 + 1 - 1 = 1$

$\Rightarrow id_{\mathbb{R}^3} - f$ est une projection

Et si $\lambda = tr(f) \neq 1$?

<u>Proposition</u>: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lin., $rg(f) = 1$, $\lambda = tr(f) \neq 0$, alors

$$\frac{1}{\lambda}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad v \longmapsto \frac{1}{\lambda}f(v)$$

est une projection, sur $Im(f)$, selon une direction // à $Ker(f)$.

<u>Preuve</u>: Comme $\frac{1}{\lambda} \neq 0$, $\quad Im(\frac{1}{\lambda}f) = Im(f)$, $rg(\frac{1}{\lambda}f) = rg(f) = 1$

$Ker(\frac{1}{\lambda}f) = ker(f)$

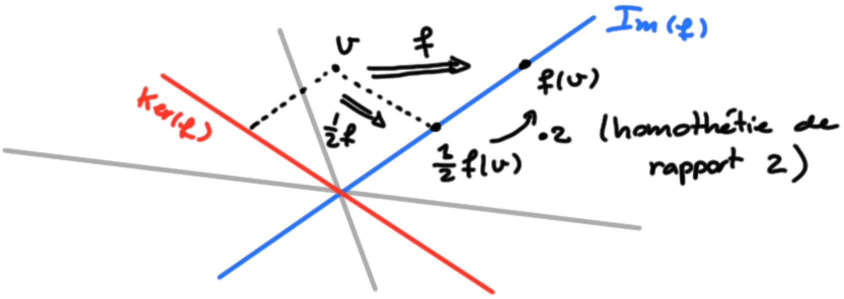
Comme $\mathrm{tr}(\frac{1}{\lambda}f) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{tr}(f) = \frac{1}{\lambda}\cdot\lambda = 1$, $\frac{1}{\lambda}f$ est une projection. $\square$

<u>Ex:</u> $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longrightarrow (x+y, x+y)$

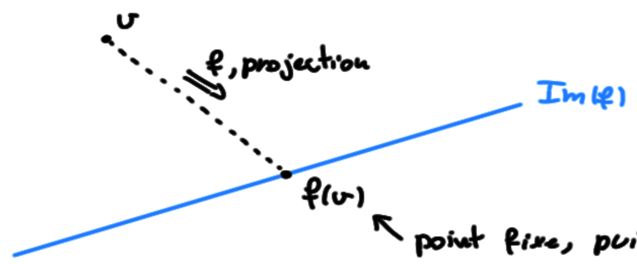
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{rg}(f) = 1$

$\lambda = \mathrm{tr}(f) = 2 \neq 0$

Par la proposition, $\frac{1}{2}f$ est la projection sur $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1,1))$, selon une dir. $\parallel$ à $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1,-1))$.



Rem:

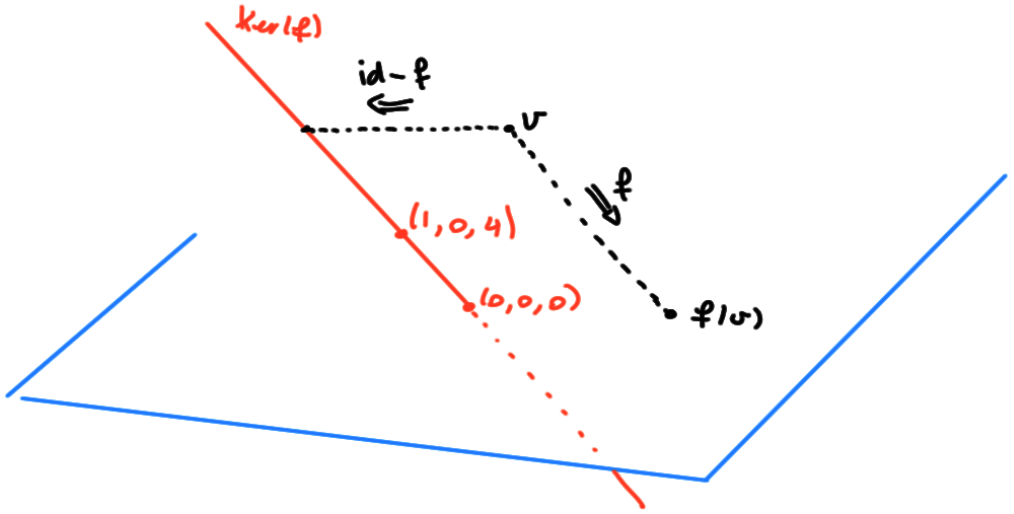


↖ point fixe, puisque $f(f(v)) = f(v)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{projection !}}}{\mathrm{Im}(f)} = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid w = f(w) \}$$ ↖ <u>points fixes</u> de f

<u>Ex</u>: Donner l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui projette

- sur le plan $x - y + 5z = 0$ ← $\mathrm{Im}(f)$
- parallèlement à la droite dirigée par $(1,0,4)$ ← $\mathrm{Ker}(f)$



Projection sur $\mathrm{Ker}(f)$, // à $\mathrm{Im}(f)$: $\underbrace{id - f}$

↖ doit être de rang 1, de Trace 1.

$$id - f \rightsquigarrow B = \underset{\uparrow}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

↖ "$x - y + 5z = 0$"

c doit être choisi tel que $Tr(B) = 1$.

Comme $B = c\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}}_{\text{trace}: 21} \Rightarrow c = \frac{1}{21}$

Donc $id - f \rightsquigarrow B = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$f \rightsquigarrow I_3 - B = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 20 & 1 & -5 \\ 0 & 21 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \left(\frac{20}{21}x + \frac{y}{21} - \frac{5z}{21},\ y,\ -\frac{4x}{21} + \frac{4y}{21} + \frac{z}{21} \right)$$

Symétries

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire, $f \rightsquigarrow A$

Déf : f est une symétrie si $f \circ f = id$. $\quad (f(f(v)) = v \quad \forall v)$

$(A^2 = I_n$, A est une matrice de symétrie$)$

Rem : Si f est une symétrie, elle est inversible, et $f^{-1} = f$.

$(A^{-1} = A)$

Proposition : Si f est une symétrie, alors $g := \frac{1}{2}(id + f)$ est une projection.

Preuve : $g = \frac{1}{2}(id + f) \rightsquigarrow B = \frac{1}{2}(I_n + A)$, et

$$B^2 = \frac{1}{4}(I_n + A)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(I_n + A + A + \underbrace{A^2}_{I_n}\right) = \frac{1}{4}(2I_n + 2A)$$

$$= \frac{1}{2}(I_n + A) = B$$

$\Rightarrow$ B est une matrice de projection,

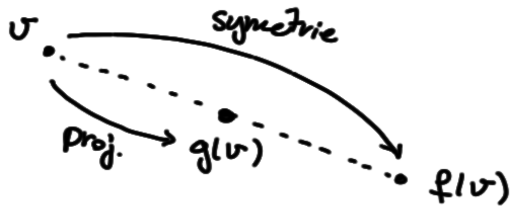
$\Rightarrow$ g est une projection. $\square$

Puisque g est une projection, on écrit : $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$v = \underbrace{g(v)}_{\in Im(g)} + \underbrace{(v - g(v))}_{\in Ker(g)}$$

$$= \overbrace{\frac{v + f(v)}{2}} + \overbrace{\frac{v - f(v)}{2}}$$

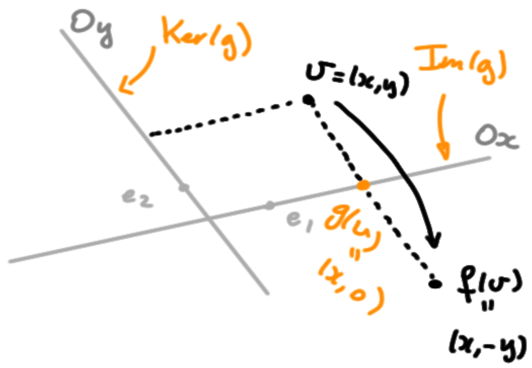
Rem : $g(v) = \dfrac{v + f(v)}{2}$ est le point milieu de v et $f(v)$.



Conclusion : Si f est une symétrie, elle se visualise géométriquement comme la symétrie par rapport à $Im(g) = Im(id + f)$, parallèle à $Ker(g) = Ker(id + f)$

Ex: ① $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (x,-y) = f(x,y)$$



(f est une symétrie par rapport à Ox, parallèle à Oy.)

En effet,

$f \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A^2 = I_2$, donc f est symétrie ($f \circ f = id$)

$g = \frac{1}{2}(id + f) \rightsquigarrow B = \frac{1}{2}(I_2 + A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}((1,0)) = Ox$

50min

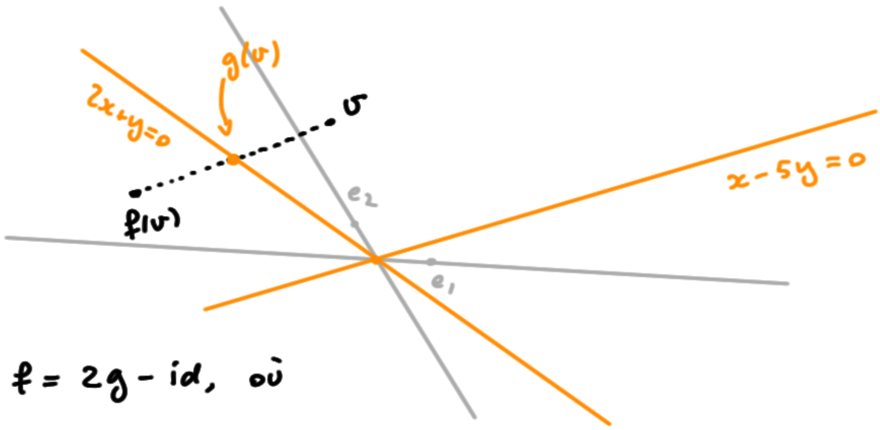
$\mathrm{Ker}(g) = \{ (x,y) : 1 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \} = \mathrm{Vect}((0,1)) = Oy$

· $\Rightarrow \forall v$, $f(v)$ est le symétrique de v par rapport à Ox, Im(g)

dans la direction parallèle à Oy.

Ker(g)

② Donner l'expression de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui représente la symétrie par rapport à $2x+y=0$, // à $x-5y=0$.



On sait que $f = 2g - id$, où

g est la projection sur $\underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{Im}(g) \\ \| \\ \mathrm{Vect}((1,-2))}}{2x+y=0}$, $/\!/$ à $\underset{\substack{\nwarrow \\ \mathrm{Ker}(g)}}{x-5y=0}$

$$\Rightarrow \quad g \rightsquigarrow B = c\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -5\end{pmatrix}, \text{ où } c \text{ est t.q. } \mathrm{Tr}(B)=1$$

$$= c\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -5\\ -2 & 10\end{pmatrix}}_{\mathrm{Trace}=11} \Rightarrow c = \frac{1}{11}$$

$$B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}1 & -5\\ -2 & 10\end{pmatrix}$$

Donc $f = 2g - id \leftrightarrow A = 2B - I_2 = \begin{pmatrix}-9/11 & -10/11\\ -4/11 & 9/11\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f(x,y) = \left(-\frac{9x}{11} - \frac{10y}{11}, -\frac{4x}{11} + \frac{9y}{11}\right).$$

③ $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = \frac{1}{5}(4x-2y-7z, -x+3y-7z, -x-2y-2z)$

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -2 & -7\\ -1 & 3 & -7\\ -1 & -2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{faites-le !}}}{\dots} = I_3$$

$\Rightarrow$ A est une matrice de symétrie

$\Rightarrow$ f est une symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(g)$, $/\!/$ à $\mathrm{Ker}(g)$, où $g = \frac{1}{2}(id + f)$.

Or

$$g = \tfrac{1}{2}(id + f) \rightsquigarrow B = \tfrac{1}{2}(I_3 + A) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -2 & -7 \\ -1 & 8 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \\ & & \shortparallel \\ & & -C_1 - C_2 \end{array}$$

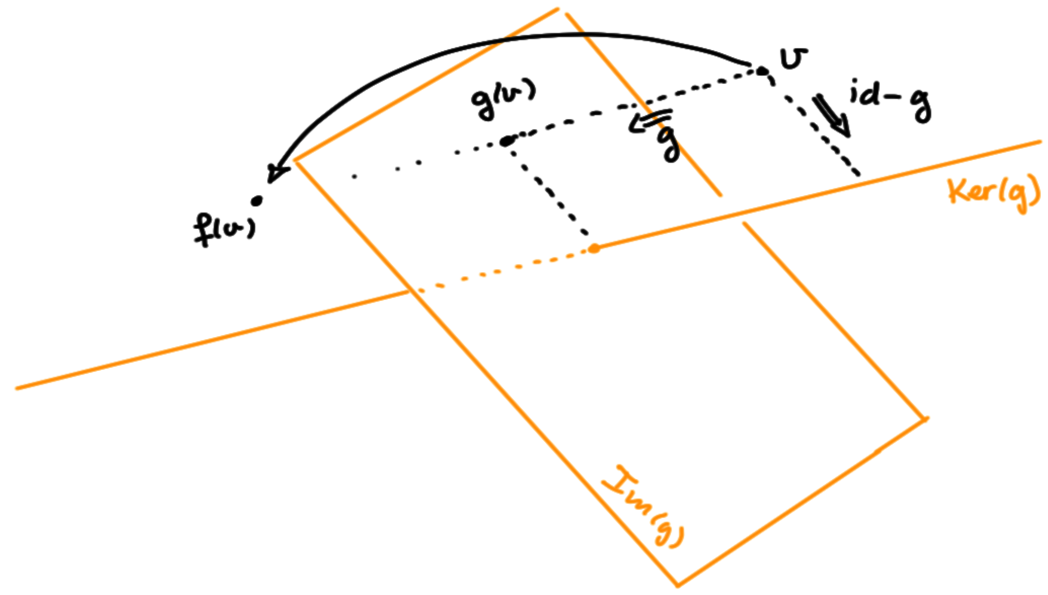
$$= \frac{1}{10}\left[\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}(1 \quad 0 \quad -1) + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}(0 \quad 2 \quad -2)\right]$$

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\big((9,-1,-1),(1,-4,1)\big) = \{x + 2y + 7z = 0\}$$

$$\mathrm{Ker}(g) = \left\{(x,y,z) : \begin{array}{r} x \quad -z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big) \quad (\text{droite})$$

$\Rightarrow$ f est la symétrie par rapport au plan $\mathrm{Im}(g)$,
$/\!/$ à la droite $\mathrm{Ker}(g)$.



<u>Variante</u> : On sait que $id - g$ projette sur $Ker(g)$, $\parallel$ à $Im(g)$

Mais $id - g \rightsquigarrow I_3 - B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $(Tr = 1\,!)$

$$= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}}$$

Donc $id - g$ projette sur $Vect((1,1,1))$, parallèlement

Ker(g)

au plan $x + 2y + 7z = 0$.

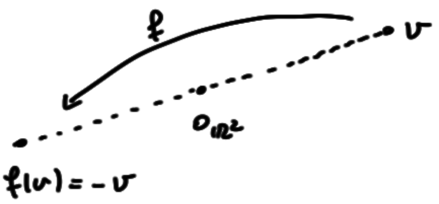
Im(g)

"Catalogue" des possibilités pour une symétrie : f, $\to g = \frac{1}{2}(id + f)$

$\to r := rg(g)$

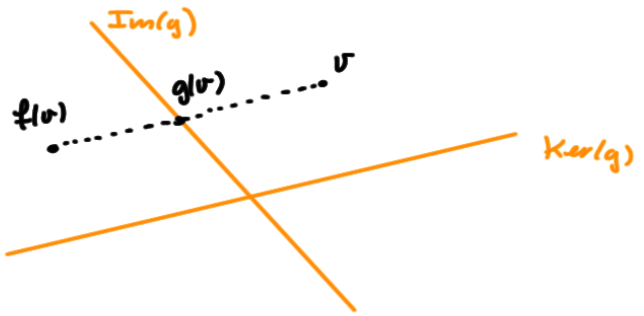
<u>Dans $\mathbb{R}^2$</u> :

<u>$r = 0$</u> : $g = 0 \to f = -id$: symétrie par rapport à $0_{\mathbb{R}^2}$



<u>$r = 1$</u> : $Im(g)$: droite

$Ker(g)$: droite

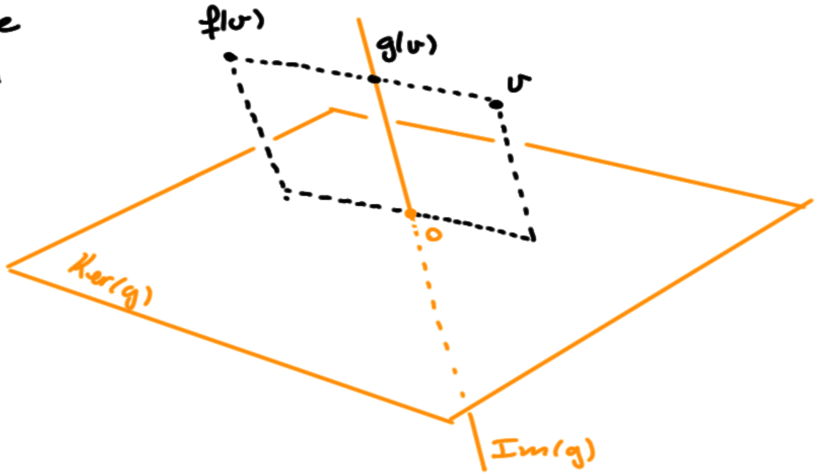


$\underline{r=2}$: $g = id \Rightarrow f = 2id - id = id.$ (pas vraiment une symétrie !)

Dans $\mathbb{R}^3$:

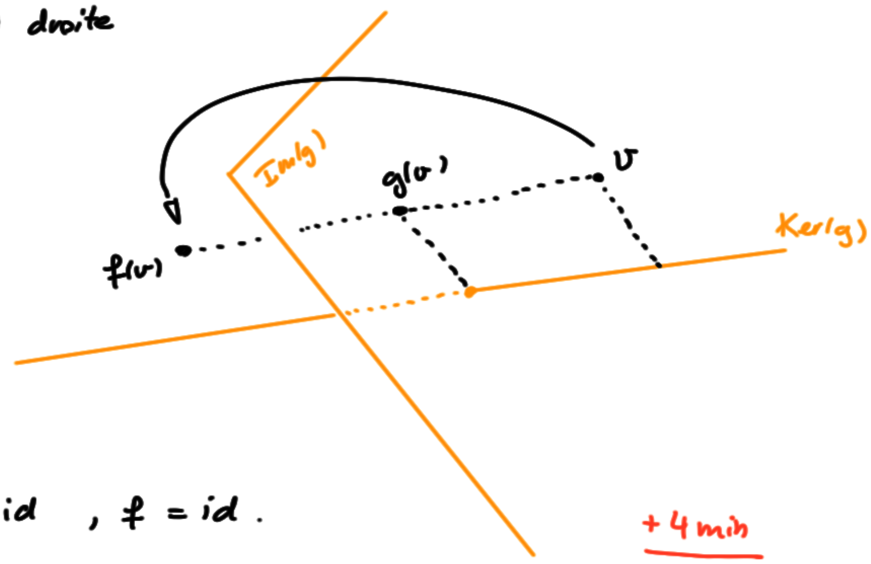
$\underline{r=0}$: $g=0$, $f = -id$

$\underline{r=1}$: $Im(g)$ droite
$Ker(g)$ plan



$\underline{r=2}$: $Im(g)$ plan

$Ker(g)$ droite



$\underline{r=3}$: $g = id$, $f = id$.

+4 min

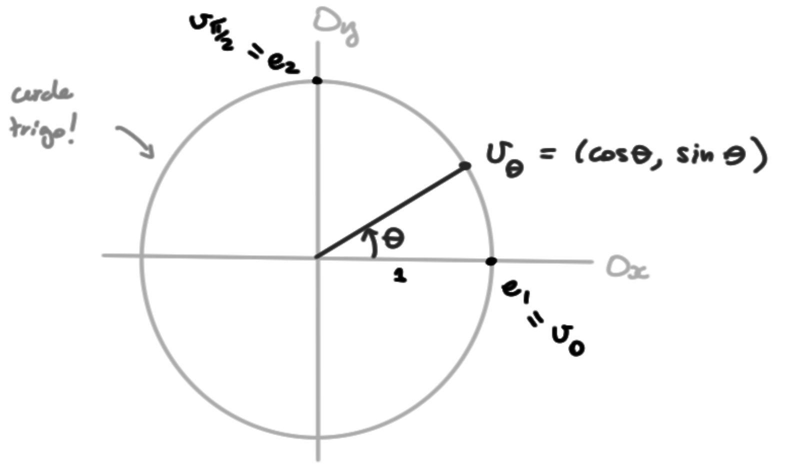
Rappels :

- $f \circ f = f \implies$ se visualise comme une projection sur $\mathrm{Im}(f)$, $/\!/$ à $\mathrm{Ker}(f)$.
- $f \circ f = id \implies g = \frac{1}{2}(id + f)$ est une projection

$\implies$ f se visualise comme une symétrie par rapport à $\mathrm{Im}(g)$, $/\!/$ à $\mathrm{Ker}(g)$.

L'interprétation géométrique de ces transformations ne dépend pas du repère choisi !

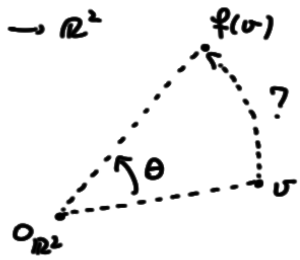
Aujourd'hui, on va considérer uniquement des repères orthonormés directs.



Rotations

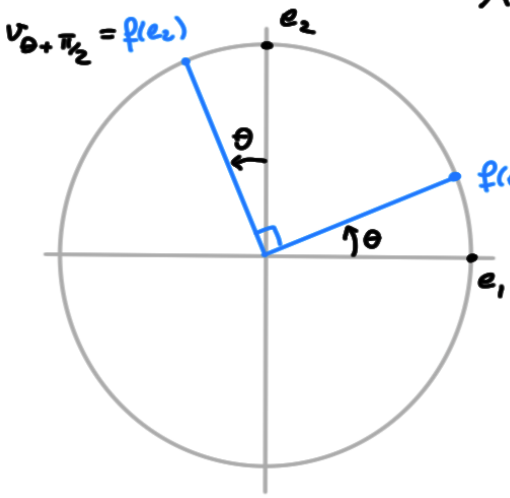
Comment construire une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont l'effet est d'effectuer une rotation d'angle θ autour de $O_{\mathbb{R}^2}$?

$f \leftrightarrow A$?



Rappel: $[f(v)]_{B_{can}} = A\,[v]_{B_{can}}$

$$A = \Big[\, [f(e_1)]_{B_{can}} \ \ [f(e_2)] \,\Big] \in M_{2\times 2}$$



$f(e_1) = v_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\text{Donc } f \sim A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \overbrace{\cos(\theta+\pi/2)}^{-\sin(\theta)} \\ \sin\theta & \underbrace{\sin(\theta+\pi/2)}_{\cos(\theta)} \end{pmatrix}$$

Déf: $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Déf: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une rotation si $\exists\, \theta$ t.q. $f \sim R_\theta$

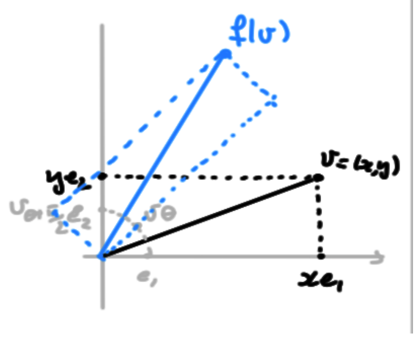
Dans un repère orthonormé direct, f se visualise comme une rotation d'angle θ autour de l'origine.

Si $v = (x,y) = x\,e_1 + y\,e_2$,

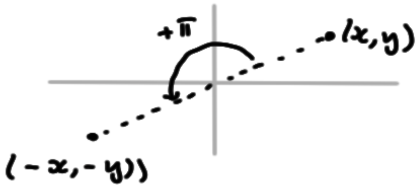
$\downarrow$

$f(v) = f(x e_1 + y e_2) = x\, f(e_1) + y\, f(e_2)$

$\qquad = x\, v_\theta + y\, v_{\theta+\frac{\pi}{2}}$



Ex: 1) $\theta = \pi$, $R_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \to f(x,y) = (-x,-y)$



2) $f(x,y) = \left(\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5}, -\frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} \right)$; est-ce une rotation ?

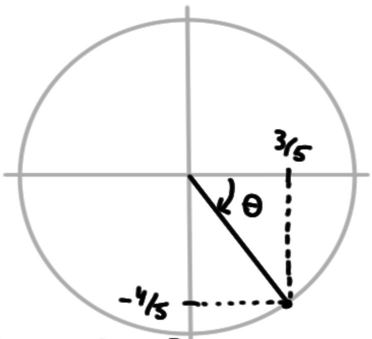
$$\searrow \quad A = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} R_\theta$$

Rem: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ représente une rotation si (a,b) est sur le cercle trigo, c.à.d. si $a^2 + b^2 = 1$.

Ici, $\left(3/5\right)^2 + \left(-4/5\right)^2 = \frac{9+16}{25} = 1$

$\to \theta = \arcsin(-4/5)$

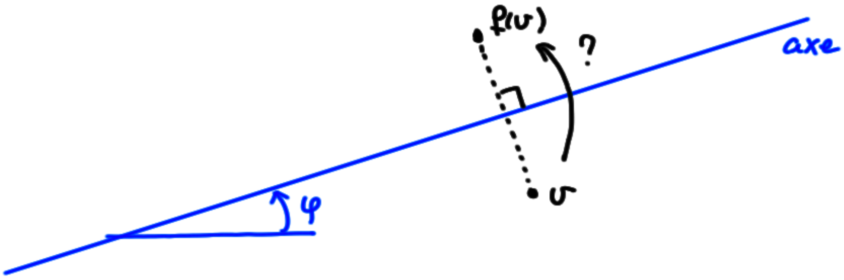
$\to A = R_{\arcsin(-4/5)}$



Remarques: 1) $R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$, et $R_{\theta_1} \cdot R_{\theta_2} = R_{\theta_2} \cdot R_{\theta_1}$

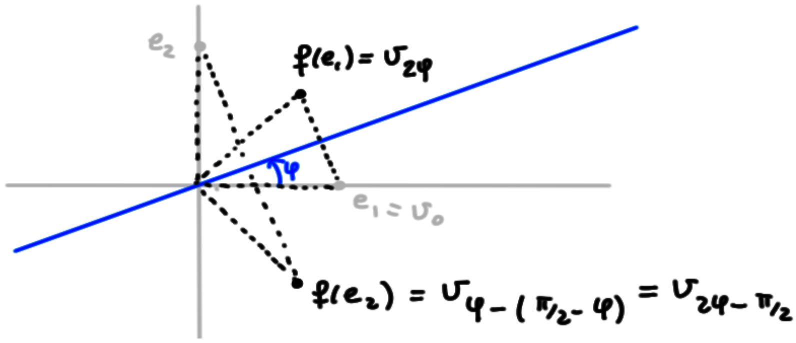
2) $R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_0 = I_2$, donc $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$

Réflexions Comment construire une applicat. lin. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont l'effet est d'effectuer une réflexion d'axe donné ?



→ on regarde l'effet sur les vect. de Base.

On considère un axe qui passe par l'origine, faisant un angle φ avec l'horizontale



$$\rightarrow f \leadsto A = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \cos(2\varphi - \pi/2) \\ \sin(2\varphi) & \sin(2\varphi - \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_{2\varphi} & v_{2\varphi - \pi/2} \end{array}$$

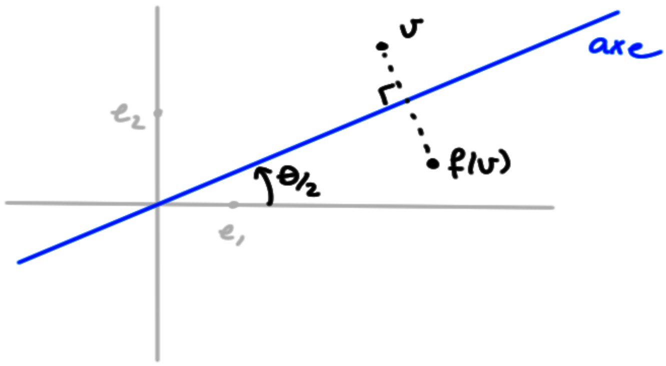
$\theta = 2\varphi$

<u>Déf:</u> $\forall \theta \in \mathbb{R}$,
$$S_\theta := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_\theta & v_{\pi/2 - \theta} \end{array}$$

"symétrie"

<u>Déf:</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lin. est une <u>réflexion</u> si $\exists\, \theta$ t.q. $f \leadsto S_\theta$.

Dans un repère orthonormé direct, f se visualise par une réflexion dont l'axe est dirigé par $v_{\theta/2}$:



Rem: L'axe est fait de tous les points fixes de f :

$$\text{axe} = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = v \}$$

Lien avec le cours d'hier (sur les symétries):

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une réflexion: $\exists\, \theta$ t.q. $f \rightsquigarrow S_\theta$

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Calculons:

$$S_\theta^{\,2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Donc f est une symétrie. Si $g := \frac{1}{2}(id + f)$, cette symétrie f se fait par rapport à $\mathrm{Im}(g)$, // à $\mathrm{Ker}(g)$.

Or $g \rightsquigarrow \frac{1}{2}(I_2 + S_\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{2} & \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix}$

Analyse A

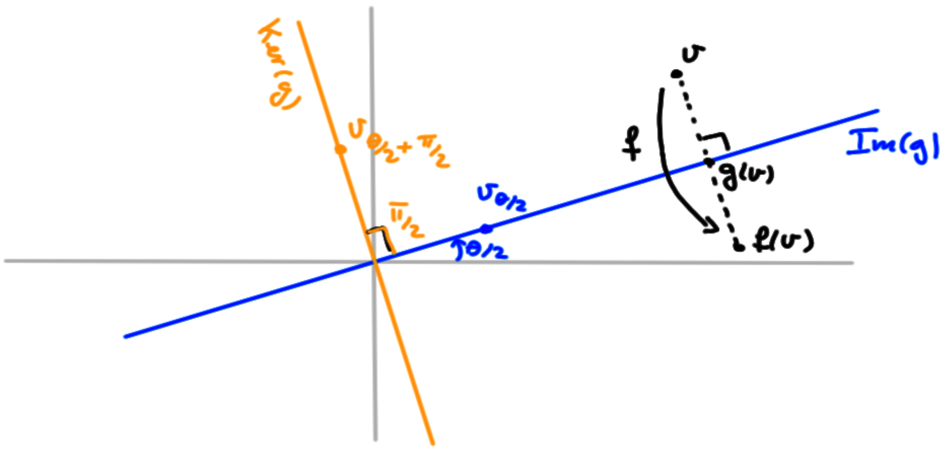
$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & \sin\theta/2 \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \cos\theta/2 & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}}_{v_{\theta/2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \end{pmatrix}}_{\text{noyau}} \quad \text{décomp. minimale}$$

$\rightarrow \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(v_{\theta/2})$

$$\mathrm{Ker}(g) = \{ (x,y) : x \cdot \cos\theta/2 + y \cdot \sin\theta/2 = 0 \}$$
$$= \mathrm{Vect}((-\sin\theta/2, \cos\theta/2))$$
$$= \mathrm{Vect}(v_{\theta/2 + \pi/2})$$

Donc f est la symétrie par rapport à la droite dirigée par $v_{\theta/2}$, dans la direction $v_{\theta/2+\pi/2}$ (qui est bien perpendiculaire à $v_{\theta/2}$!)



Ex: ① $f(x,y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) \sim A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$?

Comme $A = S_{\pi/4}$ $\longrightarrow$ réflexion par l'axe dirigé par $v_{\pi/8}$.

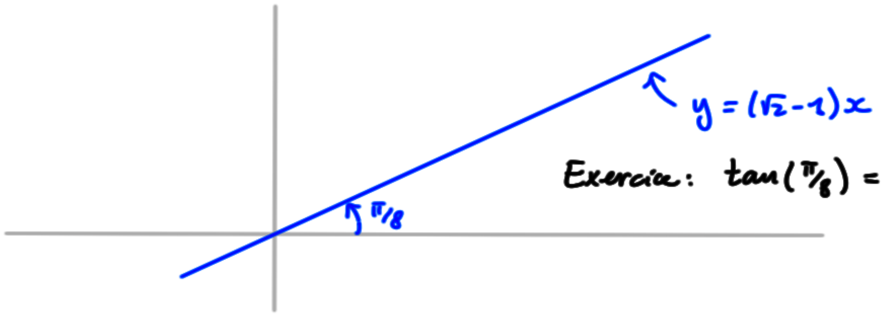
<u>Rem:</u> L'axe est aussi l'ensemble des points fixes de f !

$$f(x,y) = (x,y) \iff \begin{cases} x + y = \sqrt{2}\,x \\ x - y = \sqrt{2}\,y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$ même équation.

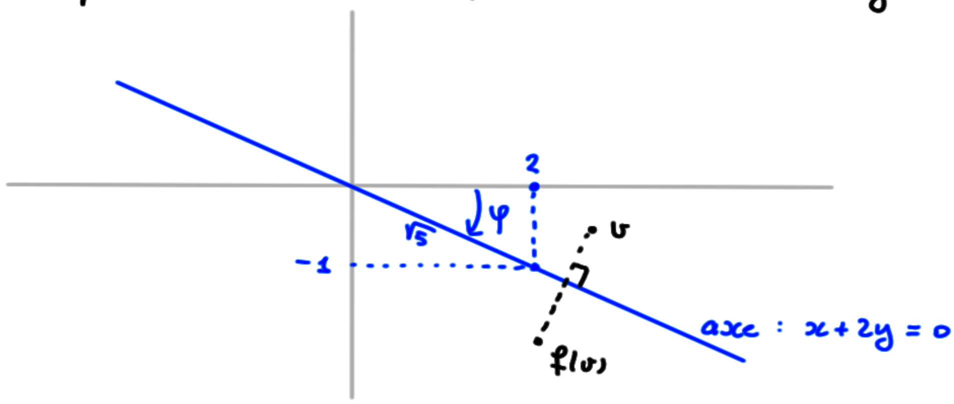
$\Rightarrow$ l'axe de la réflexion a pour équation

$$y = (\sqrt{2}-1)x$$



Exercice: $\tan(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$!

② Donner l'expression de la réflexion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe $x + 2y = 0$.



Méthode 1 : Via l'angle φ : $f \sim S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$

$\uparrow$ inclinaison de l'axe !

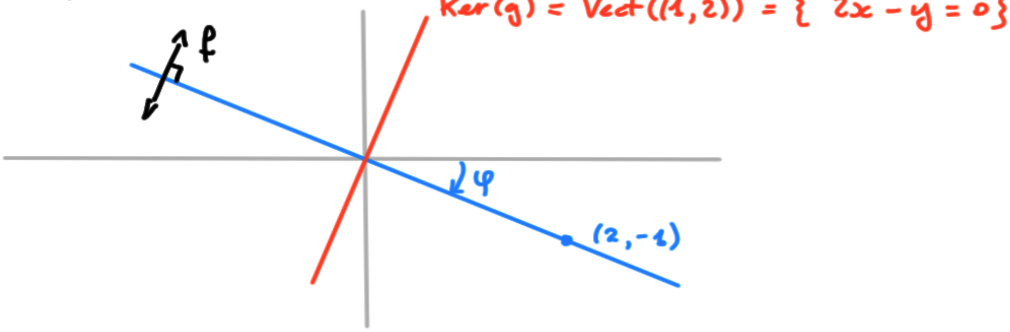
Analyse A

φ satisfait : $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\rightarrow S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} 2\cos^2\varphi - 1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & 1 - 2\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\left(2/\sqrt{5}\right)^2 - 1 & 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 - 2 \cdot \left(2/\sqrt{5}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

Ex: Déterminer l'expression de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui représente (dans un repère orthonormé direct) la réflexion d'axe $x+2y=0$



Méthode 1: Via l'angle φ: $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$, $\sin\varphi = -1/\sqrt{5}$

$$f \sim S_{2\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Méthode 2: Via la projection sur l'axe, $g = \frac{1}{2}(id + f)$.

Comme

$$g \rightsquigarrow c \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} (2 \ \ -1)$$

tel que $\mathrm{Tr}(g) = 1$ car $\mathrm{Ker}(g) = \{2x - y = 0\}$

$$g \rightsquigarrow B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $f \rightsquigarrow 2B - I_2 = 2\,\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(x,y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$

Méthode 3 : On sait que

$$f \rightsquigarrow S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

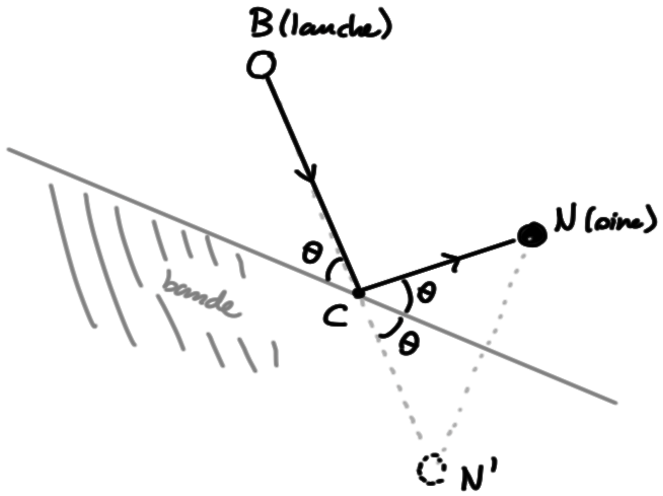
Puisque tous les points de l'axe $(x + 2y = 0)$ doivent être fixes, c.à.d. $f(v) = v \;\; \forall v \in$ axe,

En particulier : $\underbrace{f(2,-1)} = (2,-1)$

$$\begin{cases} 2\cos(\theta) - 1 \cdot \sin(\theta) = 2 \\ 2\sin(\theta) + \cos(\theta) = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = 3/5 \quad , \quad \sin(\theta) = -4/5$$

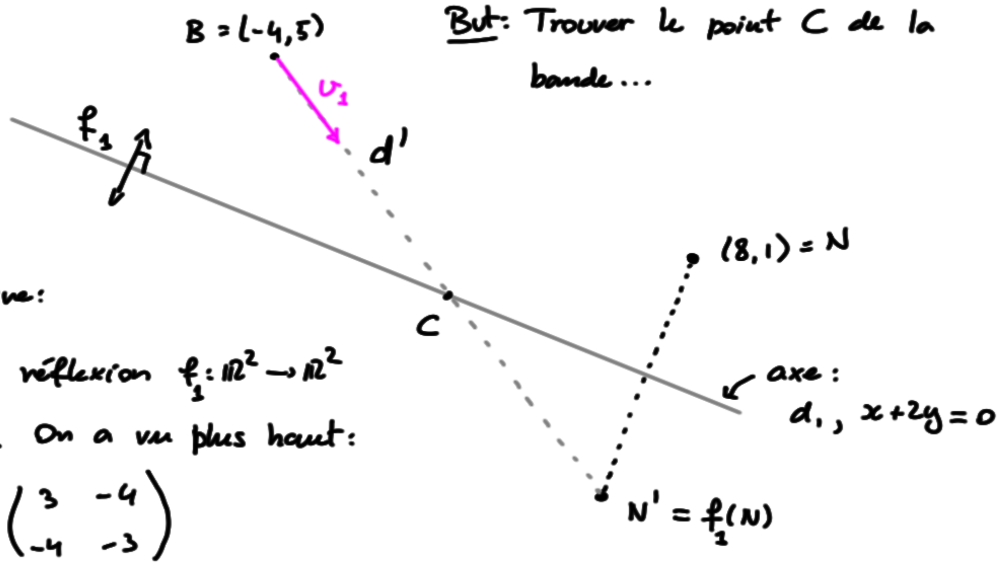
Application : "boules et rebonds"



Pour atteindre la boule noire en passant par la bande, on doit viser le point C de la bande, où C est l'intersection entre le bord de la bande et la droite BN', où N' est la réflexion de N à travers la bande.

Cas concret:

But: Trouver le point C de la bande...



Marche à suivre:

1) Calculer la réflexion $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe d_1. On a vu plus haut:

$$f_1 \leadsto \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

2) Calculer $N' = f(N) = \left(\frac{3}{5}\cdot 8 - \frac{4}{5}1 \,,\, -\frac{4}{5}8 - \frac{3}{5}1\right) = (4,-7)$

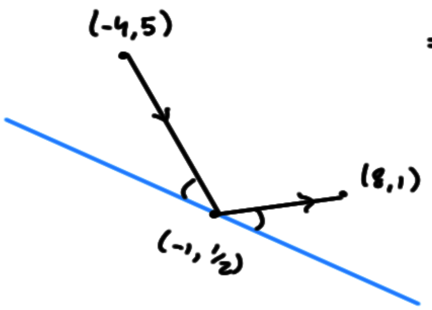
3) Calculer l'intersection entre d_1 et la droite d', passant par

$(-4,5)$, dirigée par $(4,-7)-(-4,5) = (8,-12) = 4\underbrace{(2,-3)}_{v_1}$

$$\begin{cases} d' : (-4,5) + t v_1 = (\overbrace{-4+2t}^{x}, \overbrace{5-3t}^{y}) , \quad t \in \mathbb{R} \\ d_1 : x + 2y = 0 \end{cases}$$

Intersection : $(-4+2t) + 2(5-3t) = 0$

$6 - 4t = 0 \implies t = \frac{3}{2}$

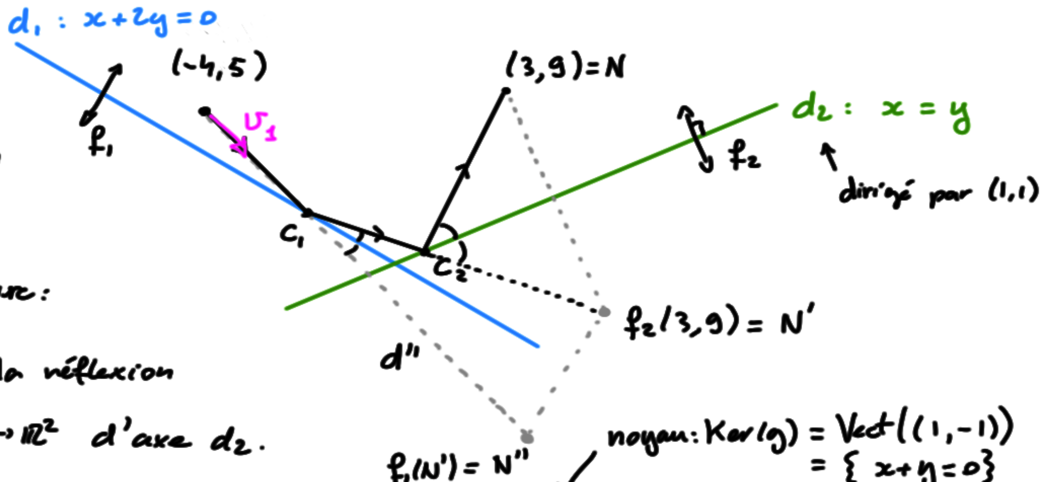


$\implies C = \left(-4+2\cdot\frac{3}{2} , 5-3\cdot\frac{3}{2}\right)$

$= \left(-1 , +\frac{1}{2}\right)$

On complique : On veut atteindre $(3,9)$ en partant de $(-4,5)$

en passant par deux bandes : d_1, puis d_2



Calculer c_1 ?

Marche à suivre :

1) Calculer la réflexion

$f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ d'axe d_2.

noyau : $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}((1,-1))$
$= \{x+y=0\}$

On sait que la projection associée est $g_2 \sim c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

t.q. $\mathrm{Tr}(g) = 1$

$$\to g_2 \sim \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $f_2 = 2g_2 - id \sim 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\to f_2(x,y) = (y,x)$

2) Calculer $N' = f_2(3,9) = (9,3)$

3) Calculer $N'' = f_1(N') = f_1(f_2(N)) = f_1(9,3)$

$$= \left(\frac{3}{5}9 - \frac{4}{5}3, -\frac{4}{5}9 - \frac{3}{5}3\right)$$

$$= (3,-9)$$

4) Calculer c_1, intersection de d_1 avec la droite d'' passant par $(-4,5)$, dirigée par $\underbrace{f_1(f_2(3,9))}_{N''=(3,-9)} - (-4,5) = (7,-14)$

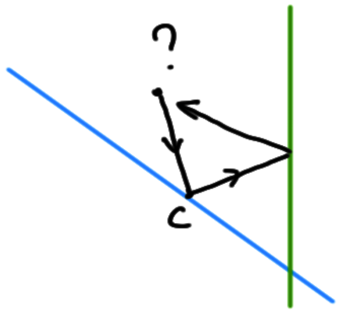
$= 7\underbrace{(1,-2)}_{v_1}$

$$\begin{cases} d'': & (-4,5)+t(1,-2) = (-4+t,\, 5-2t)\ ,\ t\in\mathbb{R} \\ d_1: & x+2y=0 \end{cases}$$

$$(-4+t)+2(5-2t)=0$$

$$6-3t=0 \quad \rightarrow \quad t=2$$

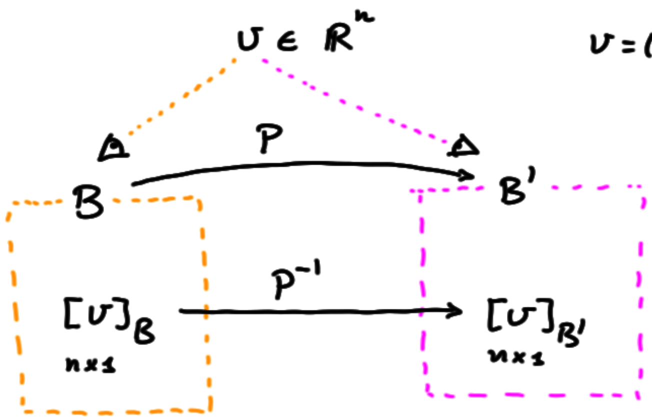
Donc $\boxed{C_1 = (-2,1)}$



⑤ Représentations matricielles d'une applic. linéaire dans des bases quelconques

Rappel: Changement de base dans $\mathbb{R}^n$.

Bases



$v=(x_1, \ldots, x_n)$

P. ex: $n=2$, $B=(v_1,v_2)$, $B'=(v_1', v_2')$

$$(v_1' \; v_2') = (v_1 \; v_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}}_{P}$$

c.à.d. $\begin{cases} v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ v_2' = \gamma v_1 + \delta v_2 \end{cases}$

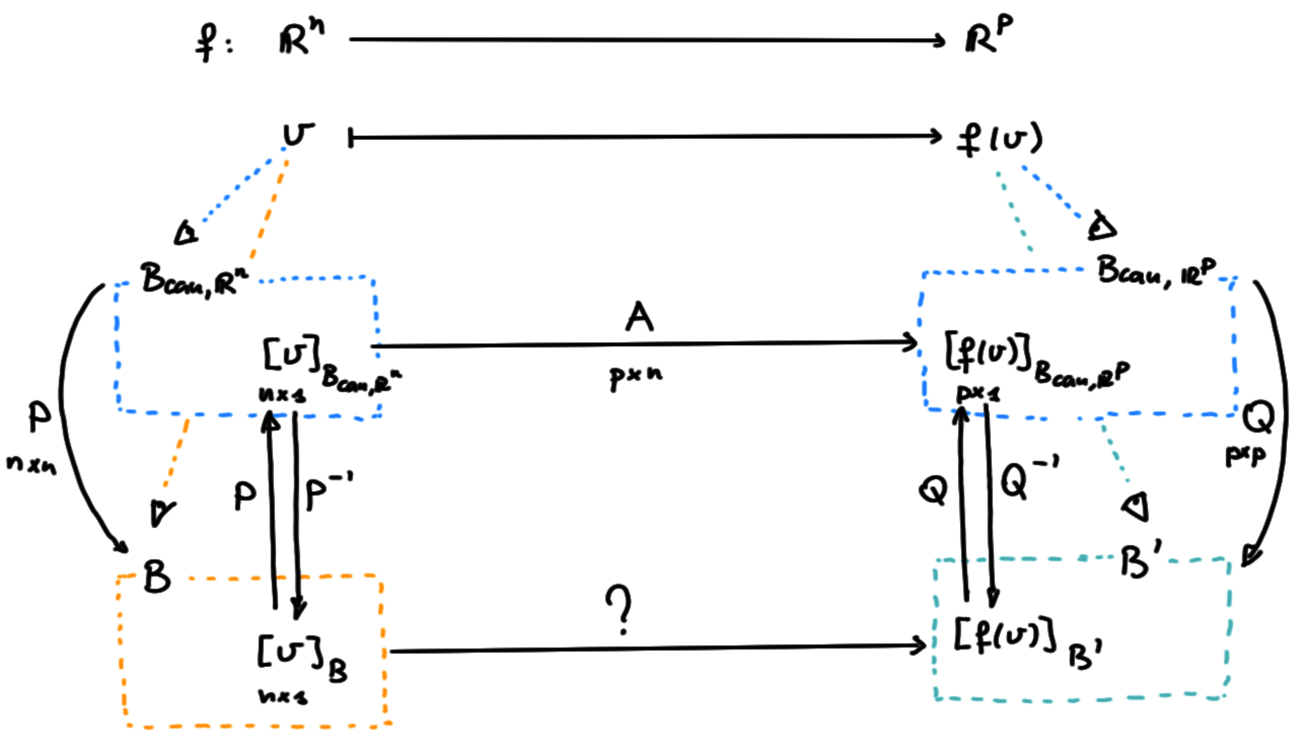
Si $v \in \mathbb{R}^2$,

$$[v]_{B'} = P^{-1} [v]_B .$$

<u>Application linéaire:</u>

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$v \longmapsto f(v)$$

<u>Question:</u> Que devient l'expression de f lorsqu'on choisit des bases B de $\mathbb{R}^n$, B' de $\mathbb{R}^p$?



$$[f(v)]_{B'} = \underbrace{\overset{p\times p}{Q^{-1}}\ \overset{p\times n}{A}}_{p\times n}\ \overset{n\times n}{P}\ [v]_B$$

Déf: La matrice $p\times n$ définie par

$$[f]_{B,B'} := Q^{-1}AP$$

est la <u>matrice représentative de f dans les bases $\overset{\text{départ}}{B}$ et $\overset{\text{arrivé}}{B'}$</u>.

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \qquad [f(v)]_{B'} = [f]_{B,B'}\,[v]_B$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}^p$$

$$B_{can,\mathbb{R}^n} \xrightarrow{P} B \qquad B_{can,\mathbb{R}^p} \xrightarrow{Q} B'$$

$$\begin{tikzcd}
{[v]_{B_{can,\mathbb{R}^n}}} \arrow[rr, "A"] & & {[f(v)]_{B_{can,\mathbb{R}^p}}} \\
{[v]_B} \arrow[u, "P"] \arrow[rr, "{[f]_{B,B'} = Q^{-1}AP}"'] & & {[f(v)]_{B'}} \arrow[u, "Q"']
\end{tikzcd}$$

<u>Remarques:</u> 1) Pour "$f \rightsquigarrow A$", on aurait dû écrire "$f \overset{B_{can},B_{can}}{\rightsquigarrow} A$",

et ici: "$f \overset{B,B'}{\rightsquigarrow} [f]_{B,B'}$"

2) Si $B = B_{can,\mathbb{R}^n}$, $B' = B_{can,\mathbb{R}^p}$, alors $P = I_n$, $Q = I_p$,

et $[f]_{BB'} = Q^{-1}AP = I_p^{-1} A I_n = A$

3) $[f]_{B,B'} = Q^{-1}AP \iff A = Q\,[f]_{BB'}\,P^{-1}$

inversibles

4) Dans le cas où $n=p$ et $B' = B$, on écrira simplement "$[f]_B$" au lieu de "$[f]_{B,B}$".

5) On peut calculer $\underset{p\times n}{[f]_{BB'}}$ d'une autre façon:

<u>Lemme:</u> Les colonnes de $[f]_{BB'}$ sont (des $p\times 1$) les images par f des vecteurs de B, décomposés dans B'. Plus précisément:
Si $B: v_1, \dots, v_n$, $B': v_1', \dots, v_p'$, alors

$$[f]_{BB'} = \underbrace{\left[\underbrace{[f(v_1)]_{B'}}_{p\times 1} \quad \underbrace{[f(v_2)]_{B'}}_{p\times 1} \quad \cdots \quad \underbrace{[f(v_n)]_{B'}}_{p\times 1} \right]}_{p\times n}$$

Preuve: $\forall\, j = 1, \dots, n$, la j-ème colonne de $[f]_{BB'}$ est égale à

$$[f]_{BB'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = [f]_{BB'}[v_j]_B = [f(v_j)]_{B'}$$

le "1" est à la jème position

car $v_j = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 1\cdot v_j + \dots + 0v_n$

□

Donc on peut se souvenir de $[f]_{B,B'}$ comme "$[f(B)]_{B'}$",

où $f(B)$ est la famille $f(v_1), \dots, f(v_n)$ $\quad (B : v_1, \dots, v_n)$

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\quad f(x,y) = (2x - y, \, -6x + 3y)$

On a: $\quad f \leadsto A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

Prenons $\cdot\ B : \underbrace{(3,4)}_{v_1}, \underbrace{(2,1)}_{v_2} \implies (v_1 \ v_2) = (e_1 \ e_2) \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}^{P}$

$\cdot\ B' : \underbrace{(1,-1)}_{v_1'}, \underbrace{(-3,2)}_{v_2'} \implies (v_1' \ v_2') = (e_1 \ e_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{Q}$

$$\begin{array}{ccc} [v]_{B_{can}} & \xrightarrow{\quad A \quad} & [f(v)]_{B_{can}} \\ P \uparrow & & \big| \ Q^{-1} \end{array}$$

$$[v]_B \xrightarrow{[f]_{BB'}} [f(v)]_{B'}$$

Calculons $[f]_{BB'}$ de deux manières :

1) Par la formule :

$$[f]_{BB'} = Q^{-1} A \; P = \underbrace{\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

2) Par le lemme: $[f]_{BB'}$ = "$[f(B)]_{B'}$"

$1^{\text{ère}}$ colonne : $[f(v_1)]_{B'} = [f(3,4)]_{B'} = [(2,-6)]_{B'}$

$$[v]_{B'} = Q^{-1}[v]_{can}$$

$$= Q^{-1}\,[(2,-6)]_{B_{can}}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$2^{\text{ème}}$ colonne: $[f(v_2)]_{B'} = [f(2,1)]_{B'} = [(3,-9)]_{B'}$

$$= \cdots = \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{BB'} = \big[\, [f(v_1)]_{B'} \; [f(v_2)]_{B'} \,\big] = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(pareil!)}$$

Question : $f \rightsquigarrow A \xrightarrow[\text{base}]{\text{chgmt de}} [f]_{BB'}$

On en tire $\mathrm{rg}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$, etc...

Comment en extraire les mêmes informations ?

<u>Proposition</u> : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire, $\mathcal{B}$ base $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}'$ base $\mathbb{R}^p$, alors

$$\mathrm{rg}([f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f)$$

Chercher "$\mathrm{rg}(g \circ f)$"

<u>Preuve</u> :

$$\mathrm{rg}([f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = \mathrm{rg}(Q^{-1} A P)$$

inversibles

P inversible

$$= \mathrm{rg}(Q^{-1}A)$$

Q^{-1} inversible

$$= \mathrm{rg}(A) \qquad \square$$

<u>Ex</u> : Dans l'ex. précédent :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{rg}(A) = 1$$

$\cdot(-2)$

ok

43min

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathrm{rg}([f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}) = 1$$

$\cdot 3/2$

$p = n$!

<u>Proposition</u> : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire, $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\det([f]_{\mathcal{B}}) = \det(A) = \det(f)$$

<u>Preuve</u> : Comme $P = Q$,

$$\det([f]_{\mathcal{B}}) = \det(P^{-1} A P)$$

$$= \det(P^{-1})\cdot\det(A)\cdot\det(P)$$

$$= \underbrace{\det(P^{-1})\det(P)}_{\substack{\det(P^{-1}P)\\ \det(I_n)=1}}\ \det(A) \quad = \quad \det(A)$$

$\square$

$\Rightarrow$ le rang et le déterminant sont des invariants numériques.

Par contre, les liens entre les expressions du noyau et de l'image dans des bases différentes doivent être faits "à la main":

Supposons que $\mathcal{B}$ (base de $\mathbb{R}^n$), $\mathcal{B}'$ (base de $\mathbb{R}^p$) $\rightsquigarrow [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

$\mathrm{Ker}(f)$? $\mathrm{Im}(f)$?

1) Ker(f) $= \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = 0_{\mathbb{R}^p} = (0,0,\ldots 0) \}$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{[f(v)]_{\mathcal{B}'}}_{[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}}} = [0_{\mathbb{R}^p}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

résoudre le système $\underbrace{[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}}_{p\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{p\times 1}$

$\downarrow$

$[v]_{\mathcal{B}}$

$$= \{ t_1 v_1 + t_2 v_2 \ldots + t_n v_n \ , \text{ où } t_1, \ldots, t_n \text{ sol. de } \}$$

vecteurs de $\mathcal{B}$

Rappel:

$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n$

2) $\underline{\mathrm{Im}(f)} = \{ f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathbb{R}^p$

$$= \{ f(t_1 v_1 + t_2 v_2 + \cdots + t_n v_n) \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ t_1 f(v_1) + \cdots + t_n f(v_n) \mid t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R} \}$$

or $[f(v_j)]_{B'} = j$ colonne de $[f]_{BB'}$

$\rightarrow$ Si cette colonne est $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{pj} \end{pmatrix}$, on a donc

$$f(v_j) = \alpha_{1j} v'_1 + \cdots + \alpha_{pj} v'_p .$$

$\underline{\text{Exemple:}}$ $\hat{m}$ que le précédent : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$f(x,y) = (2x - y, -6x + 3y)$

$\underline{\text{Relat. à } B_{can}}$: $f \sim A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((-1,3))$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ -2x + y = 0 \} = \mathrm{Vect}((1,2))$

$\underline{\text{Relat à } B}$: $\overbrace{(3,4)}^{v_1}, \overbrace{(2,1)}^{v_2}$

$\underline{B'}$: $\underbrace{(1,-1)}_{v'_1}, \underbrace{(-3,2)}_{v'_2}$: $[f]_{BB'} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow \underline{\mathrm{Ker}(f)}$: $[f]_{BB'} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

$2t_1 + 3t_2 = 0 \qquad t_2 = -\frac{2}{3} t_1$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ proport. à $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{ t_1 v_1 + t_2 v_2$, où t_1, t_2 satisf. $\}$

$$= \{ \alpha (\underbrace{3v_1 - 2v_2}) , \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ \alpha \ (5, 10) \ , \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathrm{Vect}((1,2))$$ ok

$\Rightarrow$ <u>$\mathrm{Im} f$:</u> On a que

$$[f(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[f(v_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$f(v_1) = 14 v_1' + 4 v_2'$$

$$= 14 (1, -1) + 4 (-3, 2)$$

$$= (2, -6) = 2 \underline{(1, -3)}$$

$$f(v_2) = 21 (1, -1) + 6 (-3, 2)$$

$$= (3, -9) = 3 \underline{(1, -3)}$$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \{ t_1 \underline{f(v_1)} + t_2 \underline{f(v_2)} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$

proport.

$$= \{ \alpha (1, -3) , \alpha \in \mathbb{R} \}$$

- 10min

$$= \mathrm{Vect}((1, -3))$$ ok

(Problème de beamer... merci à Dionys pour ses notes!)

soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, de matrice $A = [f]_{\mathcal{B}_{can}\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{can}\mathbb{R}^p}$

Q: peut-on trouver

- une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$
- une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^p$

de façon à ce que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ soit "aussi simple que possible"

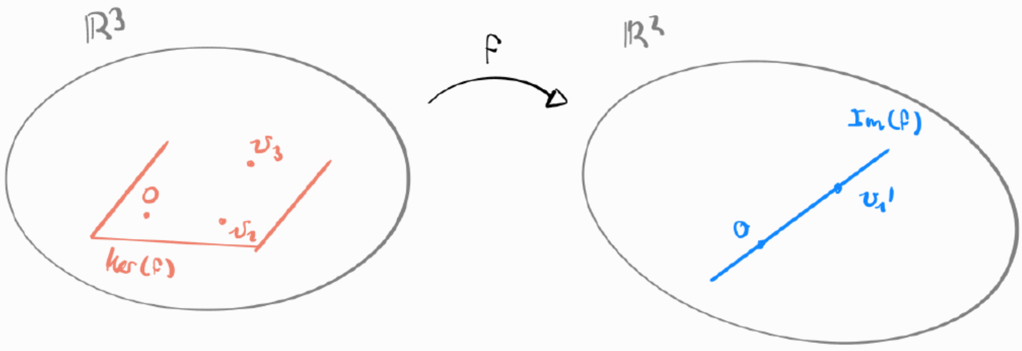
<u>exemple</u>: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x;y;z) = (6x - 9y + 3z ; 2x - 3y + z)$

$$A = [f]_{\mathcal{B}_{can}\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{can}\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ → pas simple (peu de zéros)

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} (2 \; -3 \; 1) \Rightarrow rg(A) = 1$$

$$Im(f) = Vect\,\overbrace{(3;1)}^{v_1'}$$

$$Ker(f) = \{2x - 3y + z = 0\} = Vect(\overbrace{(3;2;0)}^{v_2}, \overbrace{(1;0;-2)}^{v_3})$$



I: v_2, v_3: base de $Ker(f)$, que l'on complète pour obtenir une base

$\mathcal{B}: v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$

↳ p. ex. $v_1 = (0;0;1)$ en effet: $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\mathcal{B}': e_1, e_2$ ($\mathcal{B}_{can}\,\mathbb{R}^2$)

on a: $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{can}} = \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}\mathbb{R}^2} \cdots [f(v_3)]_{\mathcal{B}_{can}\mathbb{R}^2} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to$ on a simplifié la matrice

$v_1, v_2 \in Ker(f)$

II: $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{can}\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}'$: v_1', v_2' $\to$ on complète la base de $Im(f)$

$\hookrightarrow$ p.ex $v_2' := (1;0) = e_1$

on a: $[f]_{\mathcal{B}_{can},\mathcal{B}'} = \left([f(e_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [f(e_3)]_{\mathcal{B}'} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(6;2) = 2 \cdot v_1'$, $-3 \cdot v_1'$, $1 \cdot v_1'$

III: on combine ! : $\begin{cases} \mathcal{B} : v_1, v_2, v_3 \\ \mathcal{B}' : v_1', v_2' \end{cases}$

on a: $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [f(v_3)]_{\mathcal{B}'} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(3;1)$, $(0;0)$, $(0;0)$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Théorème:

soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire de rang r $(r \leq \min\{n,p\})$

alors $\exists$:
- $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$
- $\mathcal{B}'$ une base de $\mathbb{R}^p$

telles que:

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c|cc} & r & n-r \\ \hline r & I_r & 0 \\ p-r & 0 & 0 \end{array}$$

p ex. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

preuve: (idée)

si $\overset{\dim(\operatorname{Im} f)}{\operatorname{rg}(f)} = r$, $\dim(\operatorname{Ker} f) = n - r$ (thm du rang)

→ considérons une base de $\operatorname{Ker}(f)$: $\mathcal{B} : v_{r+1}, \cdots, v_n$

que l'on complète en base de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{B} : v_1, \cdots, v_r, \underbrace{v_{r+1}, \cdots, v_n}_{\text{base de Ker}}$

définissons : $\{ v_1' = f(v_1) \cdots v_r' = f(v_r) \}$

lemme: $\boxed{\text{cette famille est libre et forme une base de } \operatorname{Im}(f)}$

→ on complète : $\mathcal{B}' : \underbrace{v_1', \cdots, v_r'}_{\text{base de Im}}, v_{r+1}', \cdots, v_p'$

enfin :

$$[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \Big(\overbrace{\underbrace{[f(v_1)]_{\mathcal{B}'}}_{:= v_1'} \; \underbrace{[f(v_2)]_{\mathcal{B}'}}_{:= v_2'} \cdots \underbrace{[f(v_r)]_{\mathcal{B}'}}_{:= v_r'}}^{r} \; \overbrace{\underbrace{[f(v_{r+1})]}_{:= (0;\cdots;0)} \cdots \underbrace{[f(v_n)]}_{:= (0;\cdots;0)}}^{n-r} \Big)$$

$$\begin{array}{c} r \\ \\ p-r \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & & & \\ & \vdots & & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$
$$\qquad \underbrace{\qquad\quad}_{r} \underbrace{\qquad\quad}_{n-r}$$

□

exemple: (1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x;y;z) = (x - y + 3z \,;\, 2x - 3y + 4z \,;\, x + y + 7z)$

$f \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ on observe que $\det(A) = 0$

$C_1 \; C_2 \; C_3$ ↘ $5C_1 + 2C_2$

donc : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \; 0 \; 5) + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \; 1 \; 2)$

→ $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}((1;2;1),(0;1;2))$

→ $\operatorname{Ker}(f) = \begin{cases} x + 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} = \operatorname{Vect}(-5;-2;1)$

construisons $\mathcal{B}$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ → $\mathcal{B} : v_1, v_2, v_3$

$v_1 \; v_2 \; v_3$

construisons $\mathcal{B}'$:

$\to \mathcal{B}: v_1'; v_2'$ est une base de Im (lemme)

$v_1' = f(v_1) = (1;2;1)$ $\quad v_2' = f(v_2) = (-1;-3;1)$

$v_3' = (0;0;1) \to$ complète $\{v_1'; v_2'\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to \mathcal{B} : v_1', v_2', v_3'$$

par le théorème : $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 2 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

avec $Q^{-1}AP$:

- $(v_1\ v_2\ v_3) = (e_1\ e_2\ e_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{\mathcal{B}can \to \mathcal{B}}}$

- $(v_1'\ v_2'\ v_3') = (e_1\ e_2\ e_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P_{\mathcal{B}can \to \mathcal{B}'} \text{ "Q"}}$

$P_{\mathcal{B}can \to \mathcal{B}'}$ "Q"

$\Rightarrow Q^{-1}AP = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad$ det$(f) = 1$ et ici rg$(f) = 2$ ($\mathbb{R}^2$)

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ tq $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$! pas dans $\mathcal{B}can$

on a : $\ker(f) = \{(0;0)\} \to \mathcal{B} : e_1 ; e_2$

et $\mathcal{B}' : f(e_1) ; f(e_2) = \mathcal{B}' : (\cos\theta ; \sin\theta), (-\sin\theta ; \cos\theta)$

$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \left([f(e_1)]_{\mathcal{B}'} \ \ [f(e_2)]_{\mathcal{B}'} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ "$[f]_{\mathcal{B}, f(\mathcal{B})} = I_2$"

lien avec la diagonalisation :

lien avec la diagonalisation :

Q : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire, existe-t-il une base $\mathcal{B}$ telle que $[f]_{\mathcal{B}}$ soit "aussi simple que possible" ?

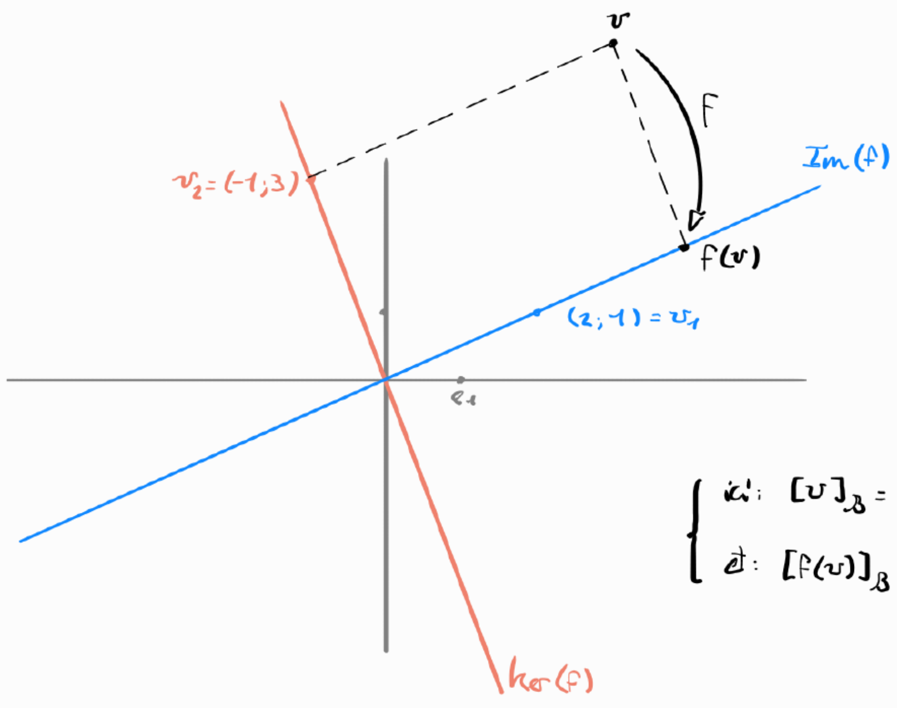
$\to$ parfois, oui

exemple : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, projection sur $\underbrace{x - 2y = 0}_{Im(f)}$, parallèlement à $\underbrace{(-1;3)}_{Ker(f)}$

$\to Im(f) = Vect(2;1)$

$\to Ker(f) = Vect(-1;3) = \{3x + y = 0\}$

$\Rightarrow f \leadsto A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$



$2 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2$

$\begin{cases} \text{ici : } [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{et : } [f(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

la nature géométrique de f suggère de la regarder dans la base :

$\mathcal{B}$: $v_1 := (2;1)$, $v_2 := (-1;3)$

$\rightarrow$ calculons $[f]_{\mathcal{B}}$ $\left(= [f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\right) = Q^{-1}AP = P^{-1}AP$

où : $(v_1 \ \ v_2) = (e_1 \ \ e_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{P_{\mathcal{B}can \rightarrow \mathcal{B}}}$

donc $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$! on a diagonalisé A

Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, linéaire, $\exists$ des bases $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^p$ telles que

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) = Q^{-1} A P$$

Dans l'Ex. 4 (Série 11), on est parti de $A = [f]_{\mathcal{B}can}$, et on est arrivé à la représentation "$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$" à l'aide d'une suite d'op. élémentaires sur les lignes et les colonnes :

$$\underbrace{E_k \cdots E_1}_{Q^{-1}} A \underbrace{\tilde{E}_1 \tilde{E}_2 \cdots \tilde{E}_\ell}_{P}$$

(on y reviendra !)

⑥ Réduction d'une application linéaire $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f \rightsquigarrow A = [f]_{\mathcal{B}can}$

Déf: Le polynôme caractéristique de f (et de A) est défini par

$$x \longmapsto \chi_f(x) := \det(A - x I_2) = \chi_A(x)$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\chi_f(x) = \det \begin{pmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{pmatrix}$

$$= x^2 - \underbrace{(a+d)}_{\mathrm{Tr}(A)} x + \underbrace{(ad-bc)}_{\det(A)}$$

Déf: Les racines réelles de χ_f (s'il y en a !) sont appelées valeurs propres de f (et de A).

"VAP"

L'existence (et le nombre) de racines dépend de

$$\Delta = \mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$$

3 cas: $\Delta < 0$: Aucune VAP.

$\Delta = 0$: Une seule VAP, λ, et $\chi_f(x) = (x-\lambda)^2$

$\Delta > 0$: Deux VAPs, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

Rem: le polynôme caractéristique est bien associé à f ; ne dépend pas de la base choisie ! En effet

Proposition: $\forall$ base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, $\chi_{[f]_\mathcal{B}}(x) = \chi_f(x) = \chi_A(x)$

Preuve: $\chi_{[f]_\mathcal{B}}(x) = \chi_{P^{-1}AP}(x) = \det(P^{-1}AP - x\underbrace{I_2}_{P^{-1}P})$

$$= \det(P^{-1}(A - xI_2)P)$$

$$= \underbrace{\det(P^{-1})\det(A - xI_2)\det(P)}$$

$$= \chi_A(x) = \chi_f(x)$$

$= 1$

$\square$

Qu'apprend-on avec χ_f ?

Proposition: Soit $v = (x,y) \neq (0,0)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, fixés. On a

$f(v) = \lambda v \iff$ λ est VAP de f, et $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\, id_{\mathbb{R}^2})$

Dans ce cas, v est appelé <u>vecteur propre de f, associé à la VAP λ</u>.

<u>Preuve:</u> $f(v) = \lambda v \iff (f - \lambda\, id)(v) = (0,0)$ $\quad (id = id_{\mathbb{R}^2})$

$\iff v \in Ker(f - \lambda\, id)$

$f(v) - \lambda \underbrace{v}_{id(v)} = (0,0)$

Comme $v \neq (0,0)$, $Ker(f - \lambda\, id) \neq \{(0,0)\}$,
donc l'appl. lin. $f - \lambda\, id$ n'est pas inversible.

$\det(f) := \det(A)$

$\longrightarrow \underbrace{\det(f - \lambda\, id)}_{\chi_f(\lambda)} = 0$

$\longrightarrow \lambda$ est VAP de f. $\square$

<u>Rem:</u> • Si v est VEP de f (associé à la VAP λ), alors tout multiple

de v est aussi VEP de f (associé à la VAP λ).

En effet, si $v' := \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$f(v') = f(\alpha v) = \alpha f(v) \underset{v \text{ est VEP}}{=} \alpha \cdot \lambda v = \lambda(\alpha v) = \lambda v'$$

• Les $\underbrace{\text{VEP}}_{}$ de f représentent des directions particulières selon lesquelles l'effet de f est simplement une multiplication par λ !

<u>Déf:</u> Si λ est VAP de f, on appelle

$$\{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = \lambda v\} = Ker(f - \lambda\, id)$$

l'<u>espace propre associé à λ</u>.

Ex: ① $f(x,y) = \frac{1}{4}(5x+9y, 3x-y)$ $\quad$ $f \leftrightarrow A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Tr} A = 1 \\ \det A = \frac{1}{4^2}(-5-27) = \frac{-32}{16} = -2 \end{array}\right\} \chi_f(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$\Delta > 0$

45min $\quad$ Deux VAPs distinctes $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

Espaces propres : Associé à λ_1 : $\quad A - \lambda_1 I_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \ 1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{id}) = \{x + y = 0\}$$

$$= \operatorname{Vect}((1,-1))$$

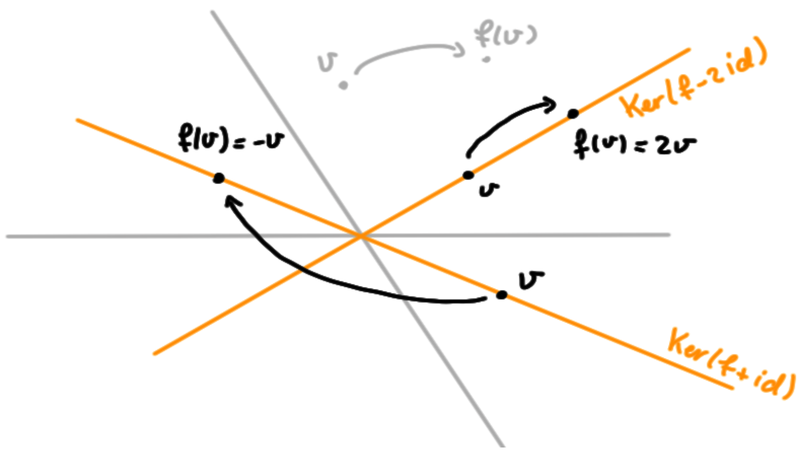
Si $v \in \operatorname{Vect}((1,-1))$, $f(v) = -v$

Associé à λ_2 : $\quad A - \lambda_2 I_2 = \dots = -3/4 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{id}) = \{x - 3y = 0\}$$

$$= \operatorname{Vect}((3,1))$$

Si $v \in \operatorname{Vect}((3,1))$, $f(v) = 2v$



Exprimons f dans la base B : $\underline{v_1 = (1,-1),\ v_2 = (3,1)}$:

$$(v_1 \quad v_2) = (e_1 \quad e_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}$$

$$\Rightarrow [f]_B = P^{-1} A P = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad !$$

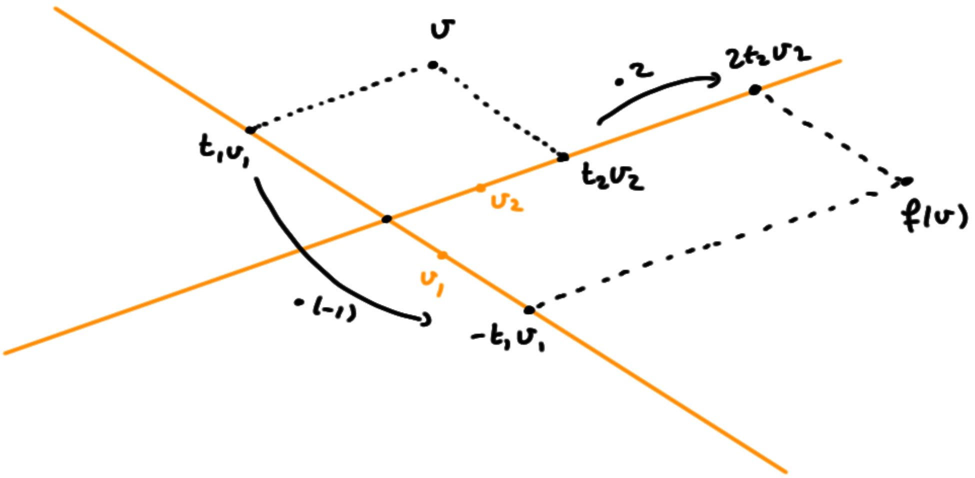
on a <u>diagonalisé</u> f

Donc si $[v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \iff v = t_1 v_1 + t_2 v_2$

$$[f(v)]_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 \\ 2t_2 \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(v) = -t_1 v_1 + 2 t_2 v_2$$



② $f(x,y) = \frac{1}{7}(-8x+3y,\ -5x+8y)$ (Ex. 2 Série 9)

(on a vu que c'était une symétrie...)

$f \leadsto A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-8 & 3\\ -5 & 8\end{pmatrix}$ $\Bigg\}$ $Tr(A) = 0$

$\det(A) = \frac{1}{7^2}(-64+15) = \underline{\underline{-1}}$

$\Rightarrow \chi_f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Deux VAPs distinctes : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

Espaces propres : Associé à λ_1 : $Ker(f - 1\cdot id) = Vect((1,5))$

à λ_2 : $Ker(f + 1\cdot id) = Vect((3,1))$

Si $v \in Ker(f-id)$: $f(v) = v$

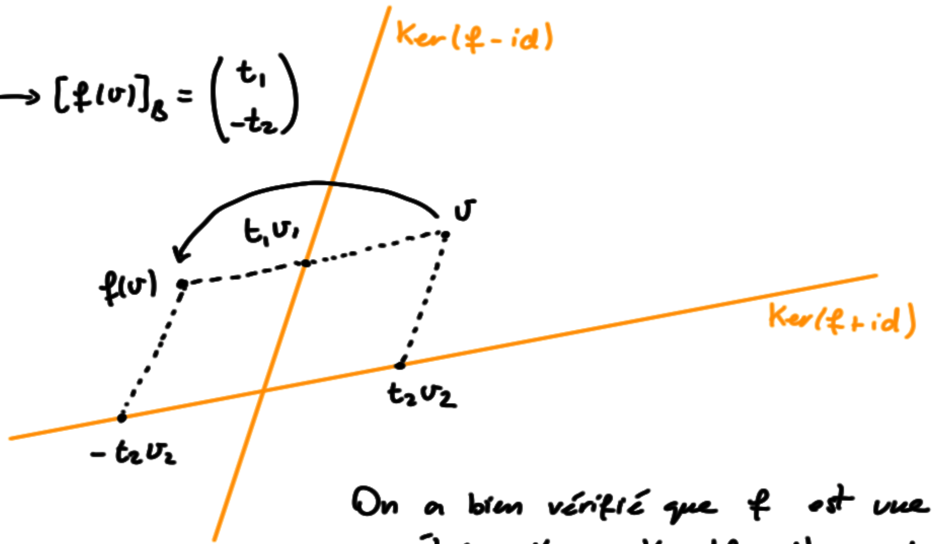
$v \in Ker(f-id)$: $f(v) = -v$

$[v]_B = \begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix} \longrightarrow [f(v)]_B = \begin{pmatrix}t_1\\ -t_2\end{pmatrix}$

$\uparrow$

$B : v_1 = (1,5)$

$v_2 = (3,1)$



On a bien vérifié que f est une symétrie d'axe $Ker(f-id)$, parallèlement à $Ker(f+id)$

Les deux exemples ci-dessus étaient avec deux VAP distinctes : $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Revenons au cas général :

Cas $\Delta > 0$: $\Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$, $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

Proposition: Si $\Delta>0$, $\exists$ des bases B de $\mathbb{R}^2$ telles que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \leftarrow f \text{ se diagonalise dans la base } B.$$

Preuve: Soit $v_1 \neq (0,0)$, VEP associé à λ_1 : $f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 v_2$

" $v_2 \neq (0,0)$, " " " λ_2 : $f(v_2) = \lambda_2 v_2 + 0 v_1$

v_1 et v_2 ne peuvent pas être proportionnels (*).

$\Rightarrow B: v_1, v_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et donc

$$[f(v_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(v_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]_B = \left[\, [f(v_1)]_B \ \ [f(v_2)]_B \,\right] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \square$$

(*) En effet, si on avait $v_2 = \alpha v_1$ $(\alpha \neq 0)$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$$\alpha f(v_1) = \lambda_2 \alpha v_1 \longrightarrow f(v_1) = \lambda_2 v_1$$

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ (absurde !)

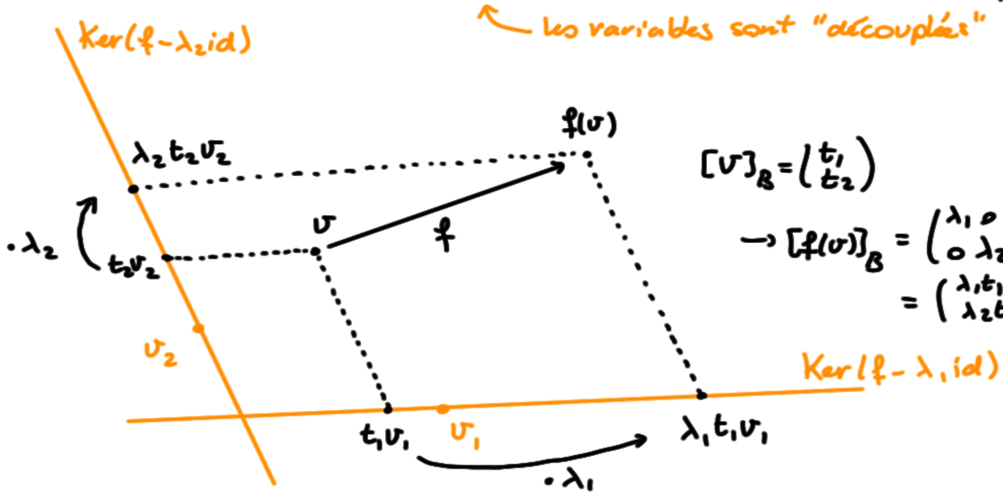
–8 min

Proposition : Si $\Delta > 0$ (alors $\chi_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, et), $\exists$ des bases B telles que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

les variables sont "découplées"

Si $B: v_1, v_2$



$[v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

$\to [f(v)]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \lambda_1 t_1 \\ \lambda_2 t_2 \end{pmatrix}$

Lemme : ($\Delta > 0$). $\overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{}$ $\boxed{\mathrm{Im}(f-\lambda_1 id) = \mathrm{Ker}(f-\lambda_2 id)}$ (*)

interchangeables !

Preuve : Soit $v \in \mathbb{R}^2$. Dans une bas propre $B: v_1, v_2$ (VEPs pour f).

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$ $\quad f(v_2) = \lambda v_2$

$[v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$, et

$$[(f-\lambda_1 id)(v)]_B = [f(v)]_B - \lambda_1 [v]_B$$

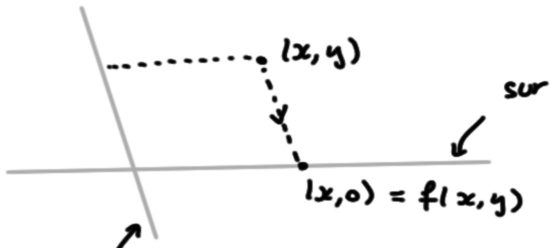
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 t_1 \\ \lambda_2 t_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 t_1 \\ \lambda_1 t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)}_{\neq 0} t_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Im}(f-\lambda_1 id) = \mathrm{Vect}(v_2) = \mathrm{Ker}(f-\lambda_2 id) \qquad \square$$

On avait déjà rencontré la relation (*) dans un cas particulier :

Ex: ① La projection $f(x,y) = (x, 0)$ (sur Ox)

$$f \sim A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



sur Ox : $f(v) = v = 1 \cdot v$

$\lambda_1 = 1$ est VAP, et l'espace associé :

$Ox = \mathrm{Ker}(f - 1 \cdot id)$

sur Oy : $f(v) = 0 = 0 \cdot v$

$\lambda_2 = 0$ est VAP, et l'espace associé :

$Oy = \mathrm{Ker}(f - 0 \cdot id) = \mathrm{Ker}(f)$

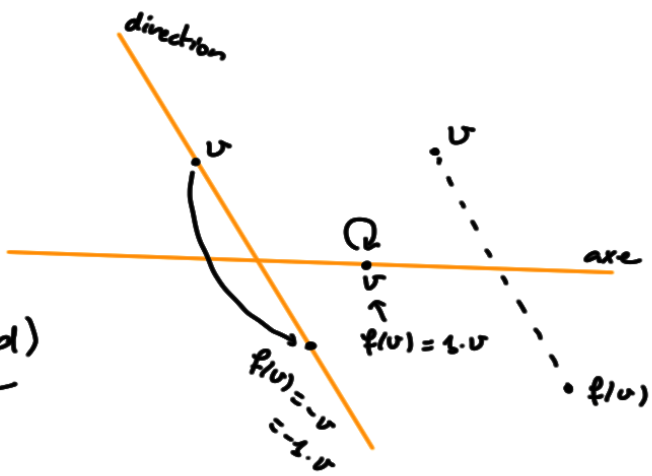
$$\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Im}(f - 0\, id)}^{Ox} = \mathrm{Ker}(f - 1 \cdot id) \quad ((*) \text{ dans ce cas partic.})$$

② Pareil pour symétries :

$\to \lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = -1$

$\to (*)$ aussi valable :

$$\underbrace{\mathrm{Im}(f - id) = \mathrm{Ker}(f + id)}_{\text{déjà vu !}}$$



Cas $\Delta = 0$: $\chi_f(x) = (x - \lambda)^2$

une seule VAP.

Espace propre associé à λ : $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, id) = \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = \lambda v \}$

$(\neq \{(0,0)\})$, donc

$$\mathrm{rg}(f-\lambda\, id) < 2$$

Cas 1) : $\underline{\mathrm{Ker}(f-\lambda\, id) = \mathbb{R}^2}$: $f(v) = \lambda v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

$\rightarrow f = \lambda\, id$ (homothétie) $\quad f \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

f "déjà" diagonale.

Cas 2) : $\underline{\mathrm{Ker}(f-\lambda\, id)}$ est une droite vect : $\quad f \neq \lambda\, id$

Comment réduire f ?

Ex: $f \sim A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{array}{l} \mathrm{Tr}\, A = 4 \\ \det A = 4 \end{array}\right\}$ $\chi_f(x) = x^2 - 4x + 4$ ($\Delta = 0$)

$= (x-2)^2$

$\lambda = 2$ est VAP

→ un espace propre associé

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Ker}(f - 2id) = \{(x,y) : x+y=0\}$

$= \mathrm{Vect}((1,-1))$

B ?

une seule VAP λ

> **Proposition** : Si $\Delta = 0$, il existe des bases B telles que
>
> $(*) \quad [f]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ← forme réduite (de Jordan), triangulaire supérieure.

(Preuve : au cours suivant)

Rem : • Si B : v_1, v_2, (*) signifie : $\begin{cases} f(v_1) = \lambda v_1 & (v_1 \text{ est VEP}) \\ f(v_2) = v_1 + \lambda v_2 & (\text{n'est pas VEP}) \end{cases}$

$\hookrightarrow \mathrm{Ker}(f-\lambda\, id)$

- On verra qu'une base $B: v_1, v_2$ peut se construire comme suit
  1) choisit un $v_2 \neq (0,0)$, pas propre ($f(v_2) \neq \lambda v_2$)
  2) définir : $v_1 := f(v_2) - \lambda v_2$ (on verra que v_1 est <u>vecteur propre</u> : $f(v_1) = \lambda v_1$!)

- En prenant $B': v_2, v_1$, (*) devient :

$$[f]_{B'} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \leftarrow \text{triangulaire inf.}$$

<u>Ex</u> : Ex. du haut : $f \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\chi_f(x) = (x-2)^2$$
$$\mathrm{Ker}(f - 2id) = \mathrm{Vect}((1,-1))$$

Construisons une base $B: v_1, v_2$ qui réduit f :

1) on choisit $v_2 = (1,0)$ ($\neq (0,0)$, et n'est pas propre !)
2) on définit : $v_1 := f(v_2) - 2v_2$
$$= (5,-3) - 2(1,0) = (3,-3)$$
On a bien : $f(v_1) = (6,-6) = 2v_1$!

$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

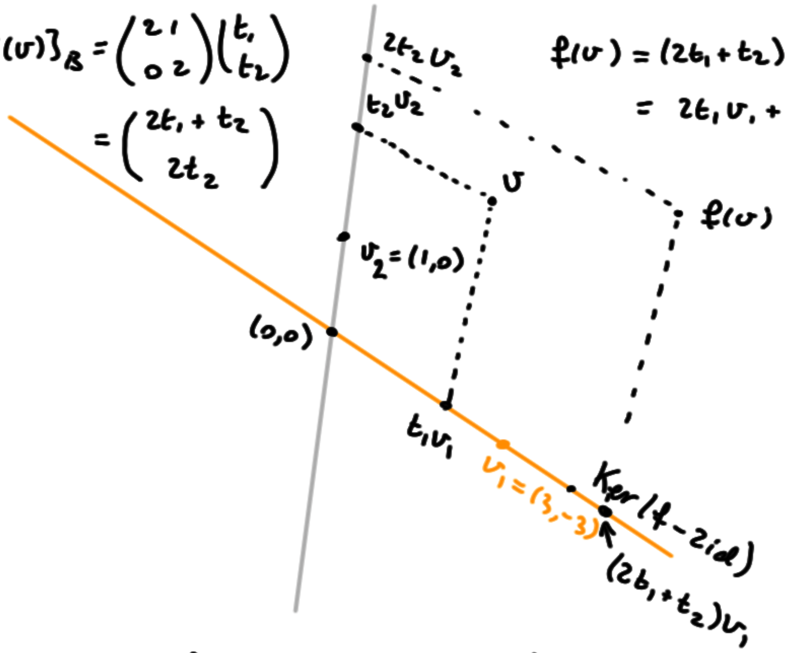
On a bien :
$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= 2v_1 + 0v_2 \\ f(v_2) &= v_1 + 2v_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
qui est bien une forme réduite de f !

On peut aussi vérifier :

$$[f]_B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \longrightarrow [f(v)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 + t_2 \\ 2t_2 \end{pmatrix}$$

$$f(v) = (2t_1 + t_2)v_1 + 2t_2 v_2 = 2t_1 v_1 + t_2 v_1 + 2t_2 v_2$$



Cas $\Delta < 0$: $\quad \chi_f(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$

pas de racines ! $\quad \Delta = \mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$

on complète le carré

$$= \underbrace{\left(x - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{2}\right)^2 \underbrace{- \left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{2}\right)^2 + \det(A)}_{= -\frac{\Delta}{4} > 0}}_{> 0 \ \forall x \in \mathbb{R}}$$

$w := \frac{\mathrm{Tr}(A)}{2}$,

$\xi := \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}$

$$\chi_f(x) = (x - w)^2 + \underbrace{\xi^2}_{> 0}$$

dans $\mathbb{C}$, $\chi_f(z)$ possède deux racines complexes

$z = w \pm \xi i$

Ex: ① $\quad f(x,y) = (3x + 4y, -2x - y) \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{Tr}(A) = 2 \\ \det A = 5 \end{matrix}$

$\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 = -16 < 0$

Comment réduire f ?

② f : rotation d'angle θ : $f \sim R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} Tr(R_\theta) = 2\cos\theta \\ \det(R_\theta) = 1 \end{array}\right\} \chi_f(x) = x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$$

$$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = \underbrace{-4\sin^2\theta}_{<0 \text{ si } \theta \text{ n'est pas mult. de } \pi}$$

(exemple "type" d'application pas diagonalisable !)

$\chi_f(x) = (x-\omega)^2 + \xi^2$

Proposition. Si $\Delta < 0$, $\exists$ des bases B telles que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}$$

forme réduite de f dans le cas où $\Delta < 0$.

(Preuve : demain)

Rem : • Si $B : v_1, v_2$ est une telle base, alors

$$\begin{cases} f(v_1) = \omega v_1 + \xi v_2 & (1) \\ f(v_2) = -\xi v_1 + \omega v_2 & (2) \end{cases}$$

• On verra qu'on peut construire une base $B : v_1, v_2$, comme suit :

1) Choisir un $v_1 \neq (0,0)$, quelconque.

2) Définir v_2 à l'aide de (1) :

$$v_2 := \frac{1}{\xi}\left(f(v_1) - \omega v_1\right)$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}$$

- Remarquons que en posant $\rho := \sqrt{\omega^2 + \xi^2}$, on peut écrire

$$[f]_B = \rho \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \omega/\rho \\ \xi/\rho \end{matrix}} & \begin{matrix} -\xi/\rho \\ \omega/\rho \end{matrix} \end{pmatrix}$$

sur le cercle trigo !

$\rightarrow \exists\, \theta$ t.q. $\omega/\rho = \cos\theta$, $\xi/\rho = \sin\theta$

$$= \underbrace{\underbrace{\rho}_{\text{homoth.}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotation d'angle } \theta}}_{\text{composition d'une rotation avec homoth.}} \leftarrow \text{forme polaire de } f\,!$$

Ex: Comme avant : $f \sim A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} \chi_f(x) &= x^2 - 2x + 5 \\ &= (\underset{\omega}{x-1})^2 + \underset{\xi}{2}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{forme réduite : } \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Base qui réalise cette réduction : 1) On choisit un $v_1 \neq (0,0)$, p. ex. $v_1 := (0,1)$

2) On définit $v_2 := \frac{1}{2}(f(v_1) - v_1) = \frac{1}{2}((4,-1) - (0,1))$
$= (2,-1)$

On sait que $[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ou le vérifier, avec "$[f]_B = P^{-1}AP$")

Forme polaire : $\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

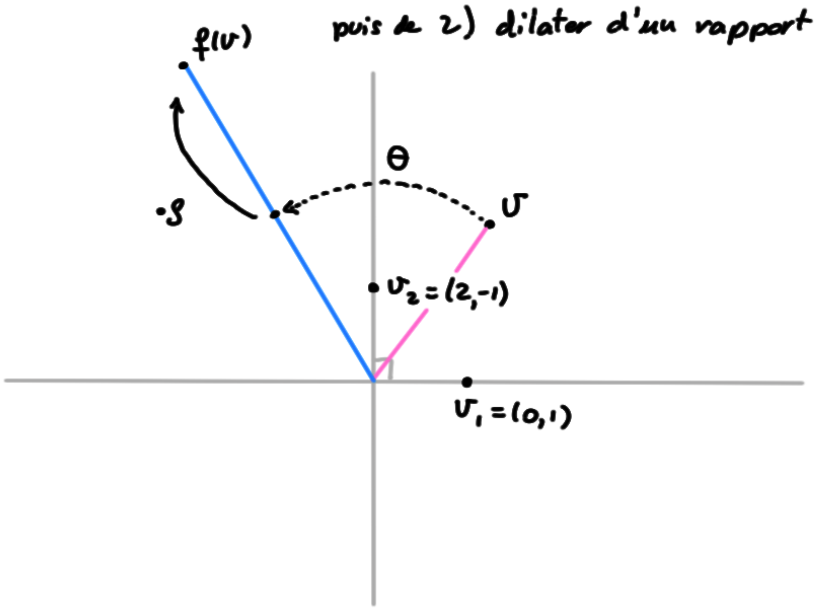
$$[f]_B = \underset{\simeq 2.236\ldots}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$\exists\, \theta$ t.q. $\cos(\theta) = 1/\sqrt{5}$
$\sin(\theta) = 2/\sqrt{5}$

$\rightarrow \theta = \arccos(1/\sqrt{5}) \cong 63.4\ldots^\circ$

Donc, dans la base $B : v_1, v_2$, représentée dans un repère

orthonormé, f a pour effet de 1) faire tourner d'un angle θ, puis de 2) dilater d'un rapport $\sqrt{5} = \rho$



Preuve des propositions "$\Delta = 0$", "$\Delta < 0$"

Ingrédient :

Théorème de Cayley–Hamilton:

$$\boxed{\text{Toute matrice } A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ annule son polynôme caractéristique: } \quad \chi_A(A) = 0 \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Explication: Si $P(x)$ un polynôme réel, $P(x) = \underbrace{a_0}_{a_0 \cdot 1} + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,
on peut définir, $\forall A \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$,

$$P(A) := a_0 I_p + a_1 A + \cdots + a_n A^n \in M_{p\times p}(\mathbb{R})$$

Donc $\chi_A(A) = A^2 - Tr(A) A + det(A) I_2$

(Preuve : Exercice de la Série 13!)

Rem: Par le Théorème, on a toujours :

$$A^2 = Tr(A) A - det(A) I_2$$

En particulier, si $rg(A) = 1$, alors $det(A) = 0$, on retrouve :

$$A^2 = Tr(A) A.$$

(on avait vu que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de rang 1, alors $f \circ f = Tr(f) \cdot f$)

Preuve de la Prop. "$\Delta = 0$": $\chi(x) = (x - \lambda)^2$ ← unique VAP

A possède une VAP → fixons un VEP associé : $v_\lambda \neq (0,0)$: $f(v_\lambda) = \lambda v_\lambda$.
Considérons un $v_2 \neq (0,0)$ quelconque, non-colinéaire à v_λ, et définissons $v_3 := f(v_2) - \lambda v_2 = (f - \lambda id)(v_2)$

Affirmation : v_1 est VEP, associé à λ.

En effet, $(f-\lambda\, id)(v_1) = \underbrace{\big((f-\lambda\, id)\circ(f-\lambda\, id)\big)}(v_2)$

$$(A-\lambda I_2)\cdot(A-\lambda I_2) = (A-\lambda I_2)^2 = \chi_f(A) \underset{\text{Th. Cayley-Ham.}}{=} 0$$

$$= 0_{\mathbb{R}^2}$$

$\Rightarrow f(v_1) = \lambda v_1$ (v_1 est colin. à v_λ !)

$\Rightarrow v_1$ n'est pas colin. à v_2

Donc $\mathcal{B}: v_1, v_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus,

$$\left.\begin{aligned} f(v_1) &= \lambda v_1 + 0 v_2 \\ f(v_2) &= v_1 + \lambda v_2 \end{aligned}\right\} [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \square$$

Preuve de la Prop. "$\Delta < 0$" : $\chi_f(x) = \underline{(x-\omega)^2 + \xi^2}$, $\xi > 0$

On veut :
$$\begin{cases} f(v_1) = \omega v_1 + \xi v_2 \\ f(v_2) = -\xi v_1 + \omega v_2 \end{cases}$$

Soit $v_1 \neq (0,0)$ quelconque. On définit

$$v_2 := \frac{1}{\xi}\big(f(v_1) - \omega v_1\big)$$
$$= \frac{1}{\xi}(f - \omega\, id)(v_1)$$

$$\chi_f(A) = (A - \omega I_2)^2 + \xi^2 I_2$$

Affirmation : $\mathcal{B}: v_1, v_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$

En effet, $v_2 \neq (0,0)$, sinon on aurait $(f-\omega\, id)(v_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$,
donc $f(v_1) = \omega v_1$; or il n'existe aucune VAP / VEP !

De plus v_2 n'est pas colinéaire à v_1 : S'il l'était, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = \alpha v_1 \\ \quad \shortparallel \\ \frac{1}{\xi}\left(f(v_1) - \omega v_1\right) \end{array}\right\} \quad f(v_1) = (\alpha\xi + \omega) v_1$$

$\longrightarrow$ or il n'existe aucun.e VAP/VEP !

Calculons maintenant

$$\underline{(f - \omega\, id)(v_2)} = \frac{1}{\xi}\underbrace{\left((f-\omega\, id)\circ(f - \omega\, id)\right)}(v_1)$$

$$(A - \omega I_2)^2 = \underbrace{\chi_f(A)}_{=0 \text{ par Cayley-Hamilton}} - \xi^2 I_2$$

$$= \frac{1}{\xi}\left(-\xi^2 v_1\right)$$

$$= \underline{-\xi v_1} \qquad \Rightarrow f(v_2) = -\xi v_1 + \omega v_2$$

Donc $\begin{cases} f(v_1) = \omega v_1 + \xi v_2 \\ f(v_2) = -\xi v_1 + \omega v_2 \end{cases} \Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}$

$\square$

Résumé : Sur la réduction d'une appl. lin. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / de sa matrice A.

Étudier le polyn. caractéristique $\chi_f(x)$

- $\Delta > 0$, 2 VAP $\lambda_1 \neq \lambda_2$:
  $\chi_f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$
  Réduite :
  $R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

- $\Delta = 0$, 1 VAP λ :
  $\chi_f(x) = (x - \lambda)^2$
  Réduite :
  $R = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$
  (sauf si rg(f) = 2. et dans

- $\Delta < 0$ aucune VAP :
  $\chi_f(x) = (x - \omega)^2 + \xi^2$, $\xi > 0$
  Réduite :
  $R = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \omega & \xi \\ -\xi & \omega \end{pmatrix}$

43min

ce cas : $f = \lambda\, id$

$$R = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = A$$)

Exemples "généraux" :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, projection : $f \circ f = f \iff A^2 = A$

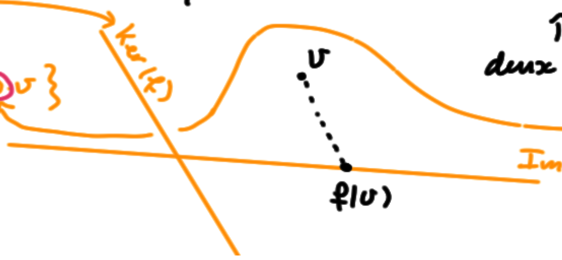
<u>Si $rg(A) = 0$</u> : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$ (déjà réduite !) $\chi_f(x) = x^2$

<u>Si $rg(A) = 1$</u> : $Tr(A) = 1$, $det(A) = 0$ (car A pas inversible !),

$$\Longrightarrow \chi_f(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

deux VAPs : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$

$= \{v : f(v) = 0 = 0 \cdot v\}$



$Im(f)$ = points fixes :
$f(v) = v = f(v) = 1 \cdot v$

$$\to R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Si $rg(A)=2$</u> : $\overset{\text{Th.}}{\underset{\text{Rang}}{\Longrightarrow}}$ $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

f étant une projection, on rappelle que $id - f$ est aussi une projection, qui projette sur $Ker(f)$.

$\Longrightarrow (id - f)(v) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow f(v) = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R$ (déjà réduite !)

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de rang 1 : $rg(A) = 1$. $\Longrightarrow det(A) = 0$

$\Longrightarrow \chi_f(x) = x^2 - Tr(A)x$

$= (x - Tr(A))x$ $\to$ Si $Tr(A) \neq 0$: 2 VAP $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = Tr(A)$

$$\left.\begin{array}{l} \to R = \begin{pmatrix} Tr(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{ou} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Tr(A) \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{diagon.}$$

$\to$ Si $Tr(A) = 0$: 1 VAP, $\lambda = 0$

$$\to R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Application : (Grandes) Puissances de matrices 2x2.

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, comment calculer $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Si $f \sim A$, alors $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} \sim A^n$

si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^{10000} = ?$

Idée : Si on sait réduire A : $\exists P$ inversible t.q.

$$P^{-1}AP = R$$

$$\Updownarrow$$

$$A = PRP^{-1}$$

On a donc :

$$A^2 = (PR\underbrace{P^{-1})\cdot(P}_{=I_2}RP^{-1}) = PR^2P^{-1}$$

$$\rightarrow \boxed{A^n = PR^nP^{-1}}$$

<u>Lemme:</u> (Puissances des réduites)

<u>Cas $\Delta>0$:</u> $R^n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix}$

<u>Cas $\Delta=0$:</u> $R^n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

<u>Cas $\Delta<0$:</u> $R^n = \begin{pmatrix} w & -\xi \\ \xi & w \end{pmatrix}^n = \rho^n (R_\theta)^n$ (forme polaire)

où $\rho = \sqrt{w^2+\xi^2}$, $\cos\theta = w/\rho$, $\sin\theta = \xi/\rho$

$$= \rho^n R_{n\theta}$$

$$= \rho^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

<u>Preuves:</u> <u>$\Delta>0$:</u> $R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $R^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$ ↖ vraie pour $n=2$

vraie pour n,

Si $R^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$, alors

$$R^{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}}_{R^n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

↑ vraie pour $n+1$ aussi.

$\underline{\Delta = 0}$: $R = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $R^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{vraie pour } n=2$$

Si vraie pour n, alors

$$R^{n+1} = R^n \cdot R = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n \cdot \lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^{(n+1)-1} \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} \leftarrow \text{vraie pour } n+1 \text{ aussi.}$$

$\square$

$\underline{\text{Ex}}$: ① $f(x,y) = (3x-y, 5x-3y) \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Tr}A = 0$, $\det A = -4$

$\chi_f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ $\quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2$

$\lambda_1 \xrightarrow{\text{VEP}} v_1 = (1,1)$, $\quad \lambda_2 \xrightarrow{\text{VEP}} v_2 = (1,5)$

$$\underbrace{v_1 = (1,1) \qquad v_2 = (1,5)}_{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

$A = PRP^{-1}$

$$\Rightarrow A^n = PR^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= (\dots) = \frac{2^n}{4}\begin{pmatrix} 5 + (-1)^{n+1} & -1 + (-1)^n \\ 5(1-(-1)^n) & -1 + 5(-1)^n \end{pmatrix}$$

En particulier,

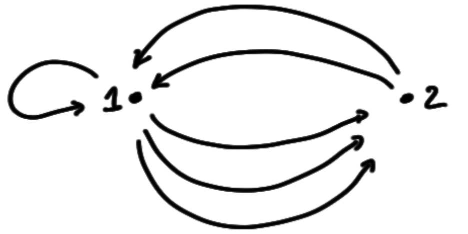
si n pair: $$A^n = \frac{2^n}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{2^n I_2}}$$

si n impair: $$A^n = \frac{2^n}{4}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} = \frac{2^n}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}}_{=A!} = \underline{\underline{2^{n-1}A}}$$

Pas de BS270 aujourd'hui !

Série 13 : Ex 4. Si $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\exists ?\, B$ t.q. $B^2 = A$ " $B = \sqrt{A}$ "

Ex 5.



$\to A = [\alpha_{ij}]_{i,j=1,2}$

α_{ij} = # de chemins à 1 pas allant du point i au point j.

Ici : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $\#(i,j,n) :=$ # de chemins à n pas allant de i à j.

comment le calculer ?

Rappel : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire, $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$

Si $f \sim A$, alors $f^n \sim A^n$

Si on sait réduire A : $P^{-1}AP = R \iff A = PRP^{-1}$

$\Downarrow$

$A^n = PR^nP^{-1}$

Traité à la fin du dernier cours !

Ex : ① $f \sim A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \implies A^n = \begin{cases} 2^n I_2 & n \text{ pair} \\ 2^{n-1}A & n \text{ impair} \end{cases}$

$\implies f^n(x,y) = f(f(f\cdots(f(x,y))\cdots)) = \begin{cases} 2^n(x,y) & \text{si } n \text{ pair} \\ 2^{n-1}(3x-y,\, 5x-3y) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

Interprétation géométrique :

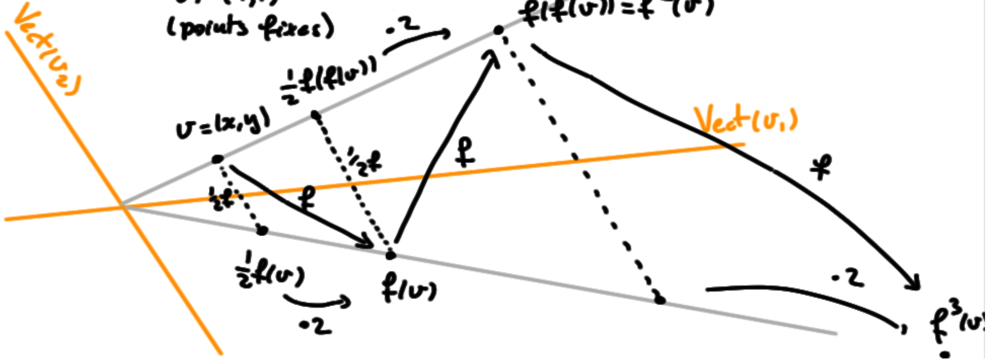
Si $n=2$: $A^2 = 2^2 I_2 \implies \left(\frac{1}{2}A\right)^2 = I_2$, donc

$\frac{1}{2}A$ est une matrice de symétrie.

$\implies \underbrace{\tfrac{1}{2}f}$ est une symétrie, $f = \underbrace{2}_{\text{homoth.}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}f}_{\text{sym}}$

VAP $\tilde{\lambda}_1 = 1$ et $\tilde{\lambda}_2 = -1$

VEP $v_1 = (1,1)$ (points fixes) $\quad v_2 = (1,5)$



② $f(x,y) = (3x-y, 5x-y) \qquad f \sim A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad$ Tr$A = 2$, det$A = 2$

$\chi_A(x) = x^2 - 2x + 2 \quad , \Delta < 0$

$= (x-1)^2 - 1 + 2 = (x-\underset{\uparrow\,\omega}{1})^2 + \underset{\uparrow\,\xi}{1}^2$

Réduite : $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{"}\xi\text{"}}\begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$ θ

Dans la base $\mathcal{B}$: v_1, v_2, t.q.

$f(v_1) = v_1 + v_2 \leftarrow$

$f(v_2) = -v_1 + v_2$

Soit $v_1 := (1,0)$, et $v_2 := f(v_1) - v_1 = (3,5) - (1,0) = (2,5)$

$P^{-1}AP = R$

$$\Rightarrow A^n = PR^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n}_{\sqrt{2}^n \begin{pmatrix} \cos(n\pi/4) & -\sin(n\pi/4) \\ \sin(n\pi/4) & \cos(n\pi/4) \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A^n = \sqrt{2}^n \begin{pmatrix} \cos(n\pi/4) + 2\sin(n\pi/4) & -\sin(n\pi/4) \\ 5\sin(n\pi/4) & -2\sin(n\pi/4) + \cos(n\pi/4) \end{pmatrix}$$

$$f^n(x,y) = (\;\ldots\ldots\; , \;\ldots\ldots\;)$$

③ $f(x,y) = (6x - 9y, x)$ $\quad f \sim A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Tr} A = 6$, $\det A = 9$

$\chi_A(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ une VAP : $\lambda = 3$

$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, Base $v_2 := (1,0)$ "pas propre"

$v_1 := f(v_2) - 3v_2 = (3,1)$ "propre"

$f(v_1) = 3v_1$

Donc

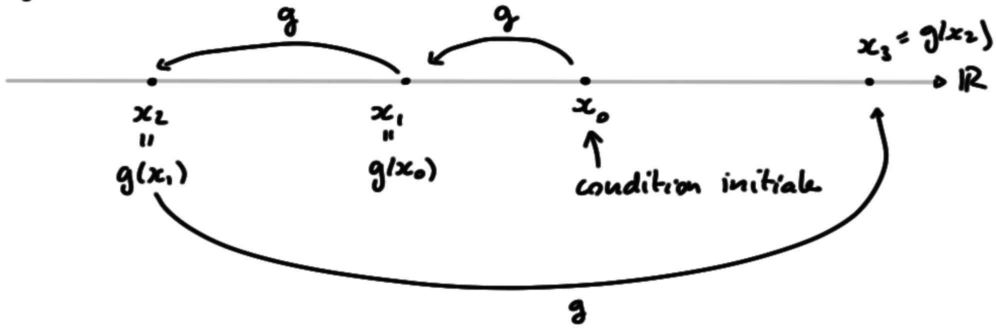
$$A^n = PR^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n}_{\begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 3^n \begin{pmatrix} n+1 & -3n \\ n/3 & 1-n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{ On sait calculer, } \forall a,b,c,d \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n}$$

Systèmes de suites linéaires définies par récurrence

Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$x_{n+1} = g(x_n)$, suite définie par récurrence.

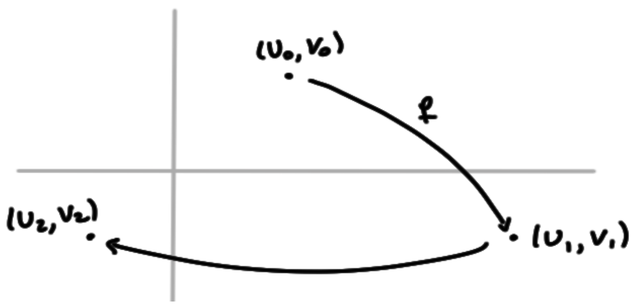
Soient $(U_n)_{n \geq 0}$, $(V_n)_{n \geq 0}$ définies comme suit :

1) U_0, V_0 : conditions initiales

2) $\begin{cases} U_{n+1} := \alpha U_n + \beta V_n \\ V_{n+1} := \gamma U_n + \delta V_n \end{cases}$

$\Rightarrow$ définit les deux suites

Si $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$



, $f \sim A$

Questions: 1) $U_n = ?$ ← comment les exprimer explicitement en
$V_n = ?$ ↙ fonction de n?

$$\begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}}$$

2) $\lim_{n\to\infty} U_n = ?$ $\lim_{n\to\infty} V_n = ?$

Ex: 1 Soit $U_0 = 2$, $V_0 = -1$, $\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n - V_n \\ V_{n+1} = 5U_n - 3V_n \end{cases}$

Ici, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ⟶ on sait que

$$A^n = \begin{cases} 2^n I_2 & n \text{ pair} \\ 2^{n-1} A & n \text{ impair} \end{cases}$$

Donc

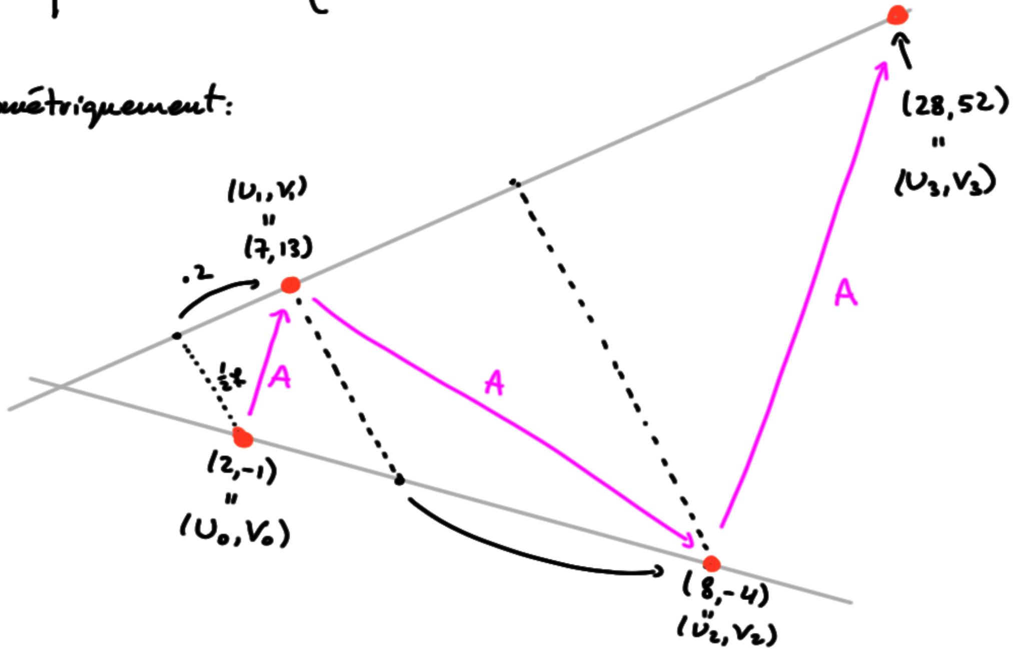
$$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2^n \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & n \text{ pair} \\ 2^{n-1} \underbrace{A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}} & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_n = \begin{cases} 2^{n+1} & n \text{ pair} \\ 7 \cdot 2^{n-1} & n \text{ impair} \end{cases}, \quad V_n = \begin{cases} -2^n & n \text{ pair} \\ 13 \cdot 2^{n-1} & n \text{ impair} \end{cases}$$

Rem: On voit que $(U_n)_{n \geq 0}$ est croissante, puisque

$$U_{n+1} - U_n = \begin{cases} 7\cdot 2^n - 2^{n+1} = 5\cdot 2^n > 0 & n \text{ pair} \\ 2^{n+2} - 7\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} > 0 & n \text{ impair} \end{cases}$$

Géométriquement:



② $U_0 = 1$, $V_0 = 0$, $\begin{cases} U_{n+1} = 3U_n - V_n \\ V_{n+1} = 5U_n - V_n \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \underbrace{A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{2^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \text{de } A^n}} = \sqrt{2}^{\,n} \begin{pmatrix} \cos(n\pi/4) + 2\sin(n\pi/4) \\ 5\sin(n\pi/4) \end{pmatrix},$$

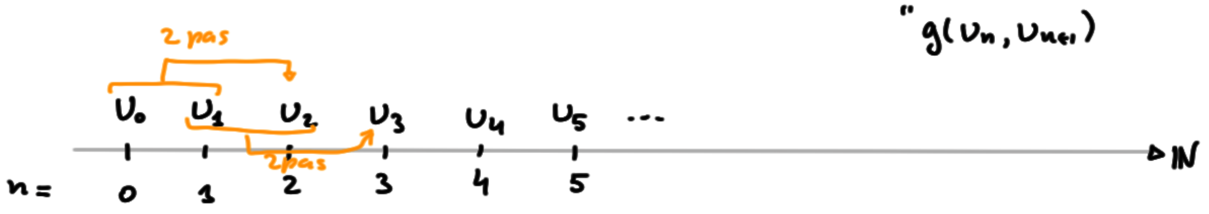
$$\begin{cases} U_n = \sqrt{2}^{\,n} \left(\cos(n\pi/4) + 2\sin(n\pi/4) \right) & \forall n \\ V_n = 5\sqrt{2}^{\,n} \sin(n\pi/4) & \forall n \end{cases}$$

Rem.: $\tilde{U}_n := \dfrac{U_n}{\sqrt{2}^n}$ et $\tilde{V}_n := \dfrac{V_n}{\sqrt{2}^n}$ sont 8-périodiques :

$\tilde{U}_{n+8} = \tilde{U}_n \quad \forall n$

$\tilde{V}_{n+8} = \tilde{V}_n \quad \forall n$

③ Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ définie comme suit : $\begin{cases} U_0, U_1 \text{ fixés} \\ U_{n+2} = \underbrace{6U_{n+1} - 9U_n}_{\text{"}g(U_n, U_{n+1})\text{"}} \end{cases}$



$$\begin{pmatrix}U_1\\U_0\end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ pas}} \begin{pmatrix}U_2\\U_1\end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ pas}} \begin{pmatrix}U_3\\U_2\end{pmatrix} \xrightarrow{1\text{ pas}} \begin{pmatrix}U_4\\U_3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}U_n\\U_{n-1}\end{pmatrix}$$

$V_n := U_{n-1}$

Comme $$\begin{pmatrix}U_{n+2}\\U_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6U_{n+1} - 9U_n\\U_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -9\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{n+1}\\U_n\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix}U_{n+1}\\U_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -9\\1 & 0\end{pmatrix}^n \begin{pmatrix}U_1\\U_0\end{pmatrix}}}_{\text{déjà calculé plus haut}}$$

P. ex., si $U_0 = -1$, $U_1 = 2$,

$$\begin{pmatrix}U_{n+1}\\U_n\end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix}n+1 & -3n\\n/3 & 1-n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_n = 3^n\left(\frac{2n}{3} - (1-n)\right) = 3^n\left(\frac{5}{3}n - 1\right)$$
$$= 3^{n-1}(5n-3)$$

−2min

- Aujourd'hui : Les exercices ont lieu ici (BCH 2201)
- Demain: pas de cours !
- À propos de la notation "$f \sim A$" : ne pas l'utiliser dans l'examen !

Question: Si $A, B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, comment savoir si elles représentent la même applic. linéaire ?

Plus précisément : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f \sim A$, est-ce qu'$\exists$

- une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$
- " " $\mathcal{B}'$ " $\mathbb{R}^p$,

telles que $[f]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = B$?

Ex: $\underbrace{A}_{\text{rg}A=2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\underbrace{B}_{\text{rg}B=2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ "$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$" $\to$ "oui"

Ensemble des représentants

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f \sim A$ $(p \times n)$

Déf: B $(p \times n)$ est équivalente à A si $\exists$ $P (n \times n)$, $Q (p \times p)$, inversibles, telles que
$$Q^{-1}AP = B.$$

L'ensemble de toutes les matrices équivalentes à A :

$$\{Q^{-1}AP \mid P (n \times n), Q (p \times p), \text{inversibles}\}$$

contient "$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$", $r = \text{rg}(A)$.

$= \{$ toutes les matrices B obtenues en agissant sur A avec des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes $\}$

voir Ex 4 (Série 11)

$= \{ [f]_{BB'} \mid B \text{ base de } \mathbb{R}^n, B' \text{ base de } \mathbb{R}^p \}$

<u>Déf:</u> B ($p \times n$) est <u>colonne-équivalente à A</u> si $\exists P$ ($n \times n$), inversible, telle que :

$$AP = B$$

L'ensemble de toutes les matrices colonne-équivalentes à A :

$\{ AP \mid P (n \times n), \text{ inversibles} \}$

$= \{$ toutes les matrices B obtenues en agissant sur A avec des opérations élém. sur les <u>colonnes</u> (uniquement). $\}$

$= \{ [f]_{B, B_{can\, \mathbb{R}^p}} \mid B \text{ base de } \mathbb{R}^n \}$

<u>Déf:</u> B ($p \times n$) est <u>ligne-équivalente à A</u> si $\exists Q$ ($p \times p$), inversible, telle que

$$Q^{-1}A = B$$

L'ensemble de toutes les matrices ligne-équivalentes à A :

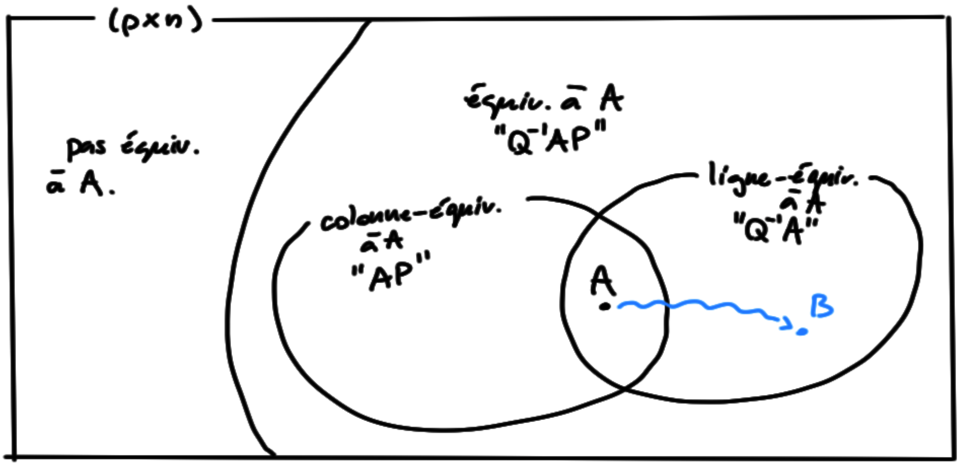
$\{ Q^{-1}A \mid Q (p \times p), \text{ inversible} \}$

$= \{$ toutes les matrices B obtenues en agissant sur A avec des opérations élém. sur les <u>lignes</u> (uniquement) $\}$

$= \{ [f]_{B_{can\, \mathbb{R}^n}, B'} \mid B' \text{ base de } \mathbb{R}^p \}$

<u>Rem:</u> Une B ($p \times n$) n'appartient pas forcément à une de ces classes ! P. ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si A $(p\times n)$, on peut diviser l'ensemble de toutes les $p\times n$ comme suit :



Une fois qu'on sait qu'une B $(p\times n)$ est "qqchose-équivalente" à A, il s'agira de trouver le "chemin" qui mène de A à B (trouver P, Q etc.)

Théorème : Soient $A, B \in M_{p\times n}$. Alors

$f \sim A$ $\quad$ $g \sim B$

1) B est équivalente à A $\iff$ $rg(g) = rg(f)$
"$Q^{-1}AP = B$"

2) B est colonne-équivalente à A $\iff$ $Im(g) = Im(f)$
"$AP = B$"

3) B est ligne-équivalente à A $\iff$ $Ker(g) = Ker(f)$
"$Q^{-1}A = B$"

On travaillera avec A $(p\times n)$, $rg(A) = r$, et une décomp. col./ligne minimale :

$$A = C_1L_1 + C_2L_2 + \cdots + C_rL_r.$$

Exemples :

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}(1 \;\; 2)$ $\quad = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}(1 \;\; -\tfrac{1}{2})$

$\left.\right\}$ $rg(A) = rg(B) = 1$ $\overset{\text{Th.}}{\underset{1)}{\Longrightarrow}}$ A et B sont équivalentes :

$\exists P, Q$ (2x2), inversibles, t.q. $Q^{-1}AP = B$.

Comment trouver P, Q ?....

On remarque qu'en fait, $Im(f) = Im(g) = Vect((1,3))$, donc

$\overset{\text{Th}}{\underset{2)}{\Longrightarrow}}$ A et B sont colonne-équiv. : $\exists P$ (2x2) inv., t.q.

$$AP = B$$

Comment trouver P ? $\leftarrow$ 2 méthodes

1) On cherche des décomp. de A et B avec la <u>même colonne</u> :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{C_1}\underbrace{(1 \;\; 2)}_{L_1} \xrightarrow{P} \quad , \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{C_1}\underbrace{(2 \;\; -1)}_{\tilde{L}_1}$$

On veut P (2x2) t.q. $AP = B$, c'est-à-dire t.q.

$$(1 \;\; 2)P = (2 \;\; -1)$$

P. ex :

$$(1 \;\; 2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P,\text{ inversible}} = (2 \;\; -1) \quad \Big\} \; AP = B$$

ou encore

$$(1 \;\; 2)\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -\tfrac{1}{2} & -3 \end{pmatrix} = (2 \;\; -1) \quad \Big\} \; AP = B$$

2) On veut $(1 \;\; 2)P = (2 \;\; -1)$; on peut <u>compléter</u> les lignes L_1 et $\tilde{L}_1$

de façon à obtenir des 2x2 inversibles:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{array}{c} \tilde{L}_1 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on complète

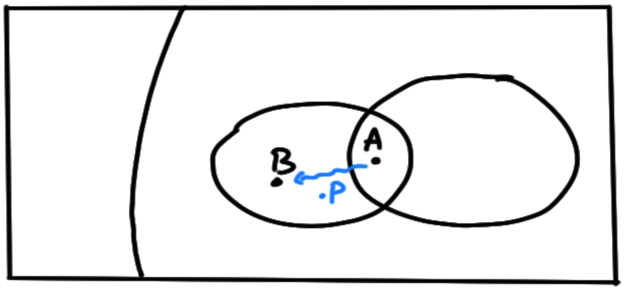
$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet: $AP = \cdots = B.$

Rem:

$\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Ker}(g)$

$\overset{\text{Th}}{\underset{3)}{\Longrightarrow}}$ A et B ne sont pas ligne-équivalentes



② $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{Im}(g) \Rightarrow$ A et B pas col.-équiv.

$\mathrm{Ker}(f) \neq \mathrm{Ker}(g) \Rightarrow$ " " " " ligne-équiv.

$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f) = 1 \Rightarrow$ A et B sont équiv.

$\Rightarrow \exists\, P, Q$ (2x2) inversibles, t.q.

$$Q^{-1} A P = B.$$

? 3 méthodes...

1) On travaille sur les décompositions : On cherche P, Q telles que :

$$Q^{-1}\overbrace{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}(1\ \ 2)}^{A}P = \overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}(1\ \ 1)}^{B}$$

P. ex : $Q^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2/3\end{pmatrix} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$

2) On cherche des op. élém. "évidentes" :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow[C_2 \leftarrow C_2/2]{} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2]{} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} = B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2/3\end{pmatrix}}_{Q^{-1}} A \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}}_{P} = B$$

3) On réduit A et B à "$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$" $= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$:

$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

(1) $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$

$= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(2) $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$

$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix} = B$

(4) $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(3) $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{E_{(4)}E_{(1)}}\, A\, \underbrace{E_{(2)}E_{(3)}} = B$$

Q^{-1} $\qquad$ P ,

où $Q^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix} \longrightarrow Q = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, et

$P = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

③ $A = \begin{pmatrix}3&1&5\\1&1&3\end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix}2&1&4\\1&3&7\end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(f) \underset{= \mathbb{R}^2}{=} \mathrm{Im}(g) \overset{\text{Th}}{\underset{2)}{\Longrightarrow}}$ A et B sont colonne-équiv.

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{Ker}(f) = \begin{cases} 3x+y+5z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} = \mathrm{Vect}((1,2,-1)) \\[2ex]
\mathrm{Ker}(g) = \begin{cases} 2x+y+4z=0 \\ x+3y+7z=0 \end{cases} = \mathrm{Vect}((1,2,-1))
\end{array}\right\} \overset{\text{Th}}{\underset{3)}{\Longrightarrow}} \text{A et B sont ligne-équiv.}$$

• A et B colonne-équiv: $\exists\, P\ (3\times3)$ t.q. $AP = B$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}3&1&5\\1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}}_{M} P = \underbrace{\begin{pmatrix}2&1&4\\1&3&7\\0&0&1\end{pmatrix}}_{N}$$

on complète de façon à ce que M, N soient inversibles

$\Longrightarrow P = M^{-1}N.$

• A et B ligne-équiv: $\exists\, Q\ (2\times2)$ t.q. $\underbrace{Q^{-1}}_{2\times2}\underbrace{A}_{2\times3} = \underbrace{B}_{2\times3}$

2 méthodes pour trouver Q:

1) Comme A et B ont le même noyau, on peut chercher des décomp. colonne/ligne qui utilisent les mêmes lignes :

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect}((1,2,-1)) = \begin{cases} x \quad\;\; + z = 0 \\ \quad\; y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_1 = (1 \;\; 0 \;\; 1)$$
$$L_2 = (0 \;\; 1 \;\; 2)$$

Décomposons A et B à l'aide de L_1 et L_2 :

$$\cdot\, A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 3L_1 + L_2 \\ \leftarrow L_1 + L_2 \end{matrix} \qquad \cdot\, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ \leftarrow L_1 + 3L_2 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} L_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} L_2 \qquad\qquad = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} L_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} L_2$$

$Q^{-1}\cdot$

$Q^{-1}\cdot$

Donc on veut que $\quad Q^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet, on a bien que

$$Q^{-1}A = \cdots = B. \qquad \text{(vérifiez !)}$$

2) On agit sur A et B avec des op. élém. sur les lignes, jusqu'à obtenir leurs versions échelonnées réduites.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = B$$

(1) $L_1 \leftrightarrow L_2$ $\qquad$ (8) $\qquad$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ $\qquad$ (7) $\qquad$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (3)\ L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4)\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

échelonnée-réduite de A

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -10 \end{pmatrix} \quad (6) \quad L_2 \leftarrow L_2/_{-5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

échelonnée-réduite de B

Donc

$$\underbrace{E_{(8)} \cdots E_{(2)} E_{(1)}}_{Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}} A = B$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

④ Si A et B sont $(n \times n)$, inversibles.

On sait:

1) $\left.\begin{array}{l} rg(A) = n \\ rg(B) = n \end{array}\right\} \overset{Th}{\underset{1)}{\Longrightarrow}}$ A et B équivalentes :

$$Q^{-1} A P = B$$

p.ex: $Q = A$, $P = B$

2) $\left.\begin{array}{l} Im(f) = \mathbb{R}^n \\ Im(g) = \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \overset{Th}{\underset{2)}{\Longrightarrow}}$ A et B colonne-équiv. :

$$AP = B$$

p.ex: $P = A^{-1}B$

3) $\left.\begin{array}{l} Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \\ Ker(g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \end{array}\right\} \overset{Th}{\underset{3)}{\Longrightarrow}}$ A et B ligne-équiv:

$$Q^{-1}A = B$$

p.ex: $Q^{-1} = BA^{-1}$