

ALGÈBRE LINÉAIRE

MAY 2024

Chapitre 1: Calcul matricielle

§1.1. Définitions et opérations

Définition: Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres (réels)

Exemples: 1) $(1 \ 2)$, $(0 \ 0)$, $(\pi \ e)$
sont des matrices à une ligne
et deux colonnes matrice 1×2

2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
sont des matrices à 2 lignes et une
colonne. matrice 2×1

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ e & \pi \end{pmatrix}$
sont des matrices à 2 lignes et 2 colonnes.
matrice 2×2

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix} = (\alpha_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}}$$

$\alpha_{i,j}$
 quelle ligne
 colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{1,1} = 1, \quad \alpha_{1,2} = 2 \\ \alpha_{2,1} = 0, \quad \alpha_{2,2} = 4$$

Contre-exemples:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut additionner deux matrices de tailles identiques:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha \\ y + \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

On peut multiplier une matrice par un nombre:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nombre}}}{2} \times \underset{\substack{\updownarrow \\ \text{matrice} \\ 2 \times 1}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut transposer une matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$$

§ 1.2. Produit matriciel

On multiplie deux matrices "ligne par colonne"

p.ex.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 3 \\ 3 \times 2 + (-2) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2 \times 2 \quad 2 \times 1 \quad 2 \times 1$

⚠ On ne peut multiplier des matrices seulement si elles sont faiblement compatibles,
i.e. $A \times B$ A matrice $p \times m$
 B matrice $m \times n$

Exemples: 1) $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \right)$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$
matrice 1×1

4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5) ~~$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$~~

En général,

$$\begin{matrix} \text{matrice } m \times p & \uparrow & A & \times & B & \leftarrow \text{matrice } p \times n & = & C & \leftarrow \text{matrice } m \times n \end{matrix}$$

§ 1.3. Règles de calcul

Si A, B, C sont des matrices de taille compatibles

- $A + B = B + A$ (addition commutative)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de +)
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité de + sur $\times$)
- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité de $\times$)

exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 4) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 12) = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

⚠ En général, $AB \neq BA$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & \textcircled{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$A \times B$

ajouter $2 \times$ la ligne 2 à la ligne 1

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \textcircled{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$B \times A$

ajouter $2 \times$ la colonne 1 à la colonne 2

la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice

élémentaire, qui agit sur les lignes

(si on multiplie à gauche) ou sur les colonnes
(si on multiplie à droite)

Exemple: Echelonner une matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par multiplication:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ajoute 5 fois la 1^{ère} ligne à la deuxième

→ retire 2 fois la 1^{ère} ligne à la troisième

→ ajoute 2 fois la 2^{ème} ligne à la troisième

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 9 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -6 \\ 2 & -4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

par multiplication:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque:

$$E_1(A E_2) = (E_1 A) E_2$$

$$E_1((E_2 A) E_3) = (E_1(E_2 A)) E_3$$

$$\neq E_3 A E_2 E_1$$

§ 1.4. Rang (2x2)

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{x2} \\ \xrightarrow{x3} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{x0} \\ \xrightarrow{x0} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{x0} \\ \xrightarrow{x0} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{rang} = 0 & \text{rang} = 1 & \text{rang} = 2 \end{array}$$

le rang d'une matrice correspond aux
nombres de pivots après échelonnement

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0 pivots

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 0 \end{pmatrix}$$

1 pivot

$$\begin{pmatrix} \textcircled{0} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 \\ 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix}$$

2 pivots

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{2}}$$

est de $\text{rg} = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2x2 2x1 1x2

Cette décomposition colonne-ligne permet de résoudre "rapidement" des équations

du type $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

donnée ↑ donnée

inconnue

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (x + 2y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

condition à l'existence de solutions: $3a = 2b$

Une solution "facile": $\begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

On peut ajouter des valeurs pour x et y

$$\downarrow y. \quad x + 2y = 0$$

L'ensemble solution est alors

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{matrix} \text{si} \\ 3a = 2b \end{matrix}$$

$$S = \emptyset$$

si
 $3a \neq 2b$

Géométriquement, S est une droite,
qui passe par $\begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de direction $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{rg}(A) = 2$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 0) + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} (0 \ 1) \end{aligned}$$

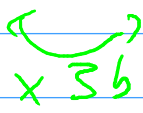
On a besoin de 2 "colonnes-lignes"

$$\text{Comment résoudre } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} ?$$

§ 1.5. Determinant.

On avait l'exemple (a) précédent la condition $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2b = 3a$$



En général, quand

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad ?$$

Réponse: quand $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (et $b \neq 0 \neq d$)

$$\Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow ad - bc = 0$$

Donc, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est de rang 1 est équivalent à

$$\underline{ad - bc = 0}$$

déterminant de A

Thm: Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Alors

$$\text{rg}(A) \leq 1 \quad \text{ssi} \quad \det(A) = 0$$

Propriétés: Si A, B des matrices 2×2

$$\det(AB) = \det(BA) \\ = \det(A) \det(B)$$

preuve: en exercices.

§1.6. Inversion (2×2):

Thm: Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

est inversible ssi

$\det(A) \neq 0$. De plus,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

preuve:

$$\begin{aligned} A \times A^{-1} &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \frac{a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}}{\det(A)} & \frac{-a_{1,1} a_{1,2} + a_{1,2} a_{1,1}}{\det(A)} \\ \frac{a_{2,2} a_{2,1} - a_{2,1} a_{2,2}}{\det(A)} & \frac{-a_{2,1} a_{1,2} + a_{2,2} a_{1,1}}{\det(A)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \square \end{aligned}$$

Exemples: (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 2 \text{ et } A^{-1} \text{ existe.}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérifions: $A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(-2)} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Résolution de $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\times A^{-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{pas de condition} \\ \text{sur } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \text{et unicité de } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

§1.7. Rang (2x3):

$\text{rg } A = 0$	$\text{rg } A = 1$	$\text{rg } A = 2$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	

Exemple: a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 - 0 \times 4 = 2 \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 3 = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 2,$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \underline{2} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \underline{2} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{rg}(A) = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Résoudre $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (x + 2y + 3z) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (x + 2y + 4z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$$

sol. simple

$$x=0, y=-1, z=1$$

On rajoute à cette solution simple tous les
(x y z) l.q.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

deux équations
de plans dans $\mathbb{R}^3$

l'intersection donne une droite. Donc,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ direction de la droite} \right\}$$

§ 1.7 Rang (3x2):

On a le cas transposé de (2x3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(A) = 2$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

décomposition non-univ-
ersale

Résolvons $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (x + 2y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (x + 4y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 7y = 1 & (d_1) \\ x + 9y = 2 & (d_2) \\ y = 3 & (d_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = 1 \\ x + 12 = 2 \end{cases}$$

Pas de solutions.

Interprétation géométrique: les droites (d_1) , (d_2) et (d_3) n'ont pas de pts d'intersection en commun.

§ 1.8. Déterminant (3x3):

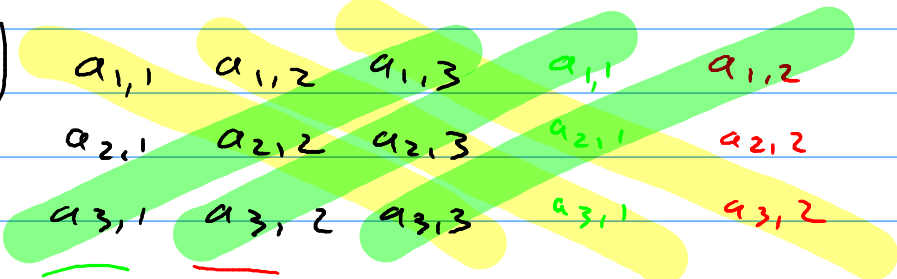
Def: Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$

matrices 3x3 à coeff. réels.

On pose

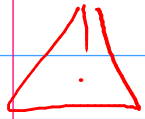
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1}$$

Astuce: 1) 

2) $\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$

$$= a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$



ceux signes

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Propriétés: 1) Antisymétrie:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2) Linéarité:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 1/2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\cdot 1/2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -8 & 7 \\ 8 & -15 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & -5 \\ 8 & -15 & -26 \end{vmatrix}$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$ $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ -15 & -26 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -8 & -5 \\ 1 & -16 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

↑
développer
la 1^{ère} ligne

$$= 1 (128 - (-5)) = \underline{\underline{133}}$$

Exemples: a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 6 & 26 & 17 \\ 14 & 53 & 60 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -17 & 39 \end{vmatrix} \quad L_2 = L_2 - 3L_1$

$$= 2 \begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -17 & 39 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -17 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-40}}$$

d) $\det \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \beta \gamma$

e) $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \delta & \varepsilon \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ 0 & \pi \end{vmatrix} = \alpha \delta \pi$

f) $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det(A) \quad (3 \times 3)$

$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A) \quad (2 \times 2)$

$\det(\lambda A) = \lambda^4 \det(A) \quad (4 \times 4)$

Remarque: le déterminant existe pour des matrices carrées.

Pour la suite: 1) $A \in M_3(\mathbb{R})$ est inversible

ssi $\det(A) \neq 0$

2) $\det(A) \neq 0$ ssi les 3 colonnes (3 lignes)
de A sont indépendantes

3) $|\det(A)|$ est le volume généré par
les 3 colonnes de la matrice

Résumé sur les règles de calcul du déterminant

1)

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{pmatrix} \\ = - \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_2 \\ L_3 \\ L_1 \end{pmatrix}$$

$$2) \det(C_1 C_2 C_3) = - \det(C_2 C_1 C_3)$$

$$= - \det(C_1 C_3 C_2) = - \det(C_3 C_2 C_1) \\ = + \det(C_3 C_1 C_2)$$

3)

$$\det \begin{pmatrix} 2L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \det \begin{pmatrix} L_1 \\ 3L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} L_1 \\ 3L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = 3 \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$4) \det(C_1 C_2 4C_3) = 4 \det(C_1 C_2 C_3)$$

$$\det(4L_1 \ 3L_2 \ L_3) = 12 \det(L_1 L_2 L_3)$$

$$5) \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 + 3L_3 \\ L_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_3 \\ L_3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow 0$$

$$\det(2L_1 + 3L_2, L_2, L_3) \\ = 2 \det(L_1, L_2, L_3) + 3 \det(L_2, L_2, L_3) \quad \rightarrow 0$$

Exercice 8: Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a+b+c=0 \\ \text{ou} \\ a=b=c \end{matrix}$$

Solution:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a+b+c & b & c \\ c+a+b & a & b \\ b+c+a & c & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+b+c) \det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

$$= (a+b+c) \det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{pmatrix}$$

$$= (a+b+c) \left[(a-b)(a-c) + (b-c)^2 \right] \\ = a^2 - ac - ab + bc + b^2 - 2bc + c^2 \\ = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\ = \frac{1}{2} (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc) \\ = \frac{1}{2} ((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2)$$

$$= (a+b+c) \left[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 \right] \frac{1}{2}$$

§1.10 Rang (3x3):

Soit $M_3(\mathbb{R})$:

$\text{rg } A = 0$	$\text{rg } A = 1$	$\text{rg } A = 2$	$\text{rg } A = 3$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 5$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $L_2 = L_3 - 3L_1$	$\det(A) \neq 0$

Proposition: $\det(A) = 0$

$\Leftrightarrow$ Au moins une ligne (colonne) est combinaison des deux autres.

Preuve: 1) $\Rightarrow$ Le cas $A=0$ est trivial

Supposons $A \neq 0$. Supposons sans perte de généralité que

et $a_{1,1} \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Alors, $\det(A) = 0 \Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} \\ 0 & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} L_1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} L_1$$

$$\Rightarrow a_{1,1} \det \begin{pmatrix} b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (b_{2,2} \ b_{2,3}) = \lambda (b_{3,2} \ b_{3,3}) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (0 \ b_{2,2} \ b_{2,3}) = \lambda (0 \ b_{3,2} \ b_{3,3})$$

$$\Rightarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} L_1 = \lambda \left(L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} L_1 \right)$$

$$\Rightarrow L_2 = L_1 \left(\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} - \lambda \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right) + \lambda L_3$$

Donc, L_2 est combinaison de L_1 et L_3 .

$$\boxed{\Leftarrow :} \quad \text{Supposons que } A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda L_2 + \mu L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{(par linéarité du det.)}$$

$$\det(A) = \lambda \det \begin{pmatrix} L_2 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = 0$$

□.

⚠ Le déterminant est linéaire sur une ligne ou une colonne

Mais !! $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Exemples: (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ 3 & -6 & 15 \end{pmatrix}$

$\text{rg}(A) = 1.$

$\det(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$
 $= 0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ -2 \ 5)$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Au'est manifestement ni de $\text{rg } 0$, ni de $\text{rg } 1$.

Pour savoir si $\text{rg } A = 2$ ou $\text{rg } A = 3$ on calcule $\det(A)$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$
 $L_2 + L_1$
 $L_3 + L_1$

$\Rightarrow \underline{\text{rg}(A) = 2}$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} (100) + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} (010) + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} (001)$

On voit que $2(L_2 + L_1) = 3(L_3 + L_1)$

$$\Rightarrow 2L_2 - 3L_3 = L_1$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{(1 \ 4 \ 3)}_{L_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1 \ 5 \ 3) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 \ 2 \ 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1 \ 5 \ 3) + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 \ 2 \ 1)$$

décomposition minimale

Résolution de $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (x + 4y + 3z) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-x + 5y + 3z) +$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-x + 2y + z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ -x + 5y + 3z = 2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

Supposons que

$$A = \begin{pmatrix} c_1 \end{pmatrix} (L_1) + \begin{pmatrix} c_2 \end{pmatrix} (L_2)$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \end{pmatrix} (a \ b \ c) + \begin{pmatrix} c_2 \end{pmatrix} (e \ f \ g)$$

$$= \left(ac_1 + ec_2 \mid bc_1 + fc_2 \mid cc_1 + gc_2 \right)$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) \leq 2$$

§1.11 Résumé

Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ (matrice $n \times p$)
 $\text{rang}(A) \leq \min(n, p)$. De plus, il
 est égal

- ▶ nombre de pivots après échelonnement de A .
- ▶ nombre de termes dans une décomposition minimale de A en colonne-ligne
- ▶ nombre maximal de lignes (ou de colonnes) indépendantes.
- ▶ la taille maximale d'une ss-matrice carrée de A avec déterminant non-nul.

§1.12. Inversion (3×3):

Prop. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que
 $\text{rg}(A) = 3$. Alors il existe une
 unique matrice $A^{-1} \in M_3(\mathbb{R})$ d.g.
 $A^{-1} A = I_3 = A \cdot A^{-1}$

preuve. Si A possède 3 lignes indépendantes (ou 3 colonnes) on peut l'échelonner pour obtenir

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, il existe des matrices élémentaires, $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ d.g.

$$\underbrace{E_n \dots E_2 E_1}_B A = I_3$$

Il existe donc $B \in M_3(\mathbb{R})$ d.g. $B \cdot A = I_3$.

Si on applique les opérations sur les colonnes, il existe des matrices élémentaires

$F_1, F_2, \dots, F_k$ d.g.

$$A \underbrace{F_1 F_2 \dots F_k}_C = I_3$$

On a donc $C \in M_3(\mathbb{R})$ d.g.

$$AC = I_3$$

$$\text{Mais } \underline{B} = B \cdot I_3 = B(AC)$$

$$= (B \cdot A) \cdot C = I_3 \cdot C = \underline{C}$$

Posons alors $B = C = A^{-1}$

Supposons que $A^{-1'} A = I_3 = A A^{-1'}$

Alors

$$\begin{aligned} \underline{A^{-1'}} &= A^{-1'} \cdot I_3 = A^{-1'} (A \cdot A^{-1}) \\ &= (A^{-1'} A) \cdot A^{-1} = I_3 \cdot A^{-1} = \underline{A^{-1}} \end{aligned}$$

□.

Corollaire: Si $A \in M_3(\mathbb{R})$ d.g. $\text{rg}(A) = 3$,
alors $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ possède une unique
solution

preuve: L'équation $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

est équivalente à

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \square$$

Exemples: (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$1) L_1 \leftrightarrow L_3 \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= E_1 A$$

$$2) L_1 \leftrightarrow L_2 \quad A'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_2 E_1 A$$

$$3) L_3 \leftarrow L_3 - L_1, \quad A''' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= E_3 E_2 E_1 A$$

$$4) L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1, \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3, \quad A^{IV} = I_3$$

$$\underbrace{E_4 E_3 E_2 E_1 A}_{A^{-1}} = I \quad E_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions:
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} V.$$

Résolution de
$$\underbrace{A^{-1}}_{A^{-1}} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{A^{-1}}_{A^{-1}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

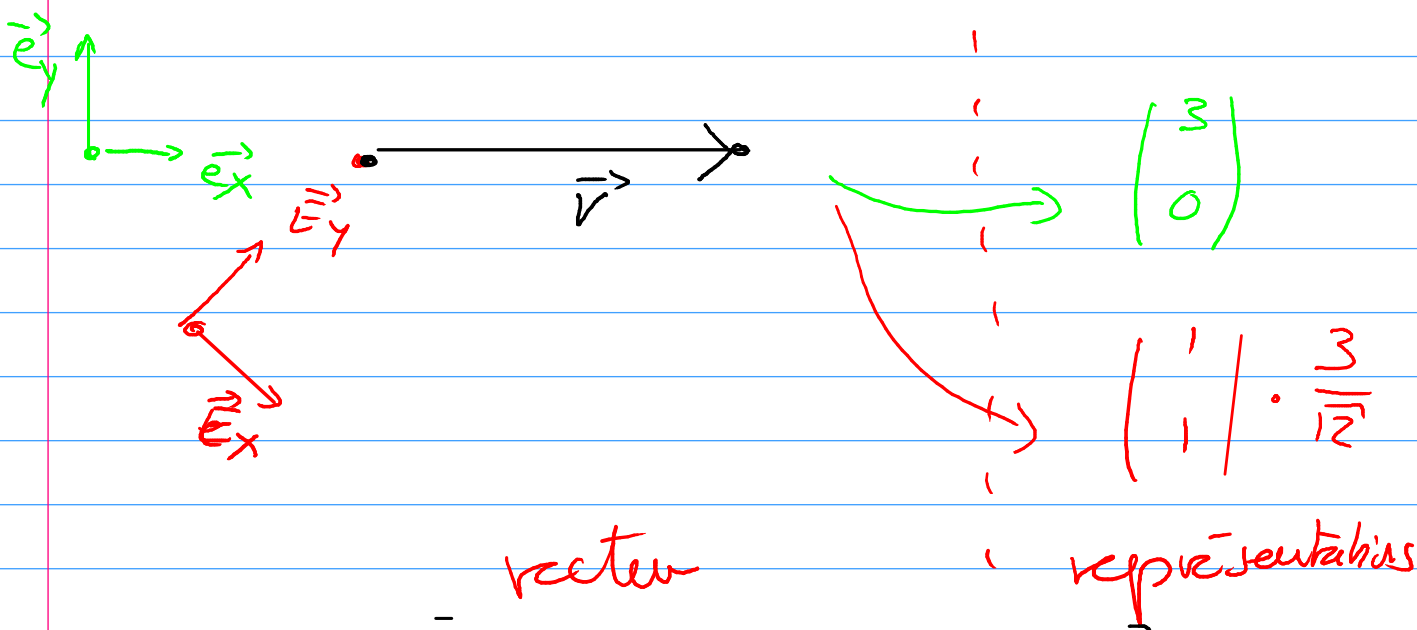
2 ESPACES VECTORIELS

§ 2-0. Qu'est-ce qu'un vecteur ?

- segment doté d'une direction et d'une norme et d'un sens
- représentation d'une position dans l'espace par rapport à une origine
- la donnée des coordonnées x, y, z dans l'espace par rapport à une origine
- la donnée des coordonnées par rapport à un repère
- une matrice 2×3
- un nombre
- une fonction $\cos(x) + 2 \sin(x) = f(x)$



Un vecteur et sa représentation
sont deux choses différentes !



L'idée d'un espace vectoriel est un ensemble d'objets mathématiques qu'on peut additionner et multiplier par un nombre

§2.1. L'espace $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$)

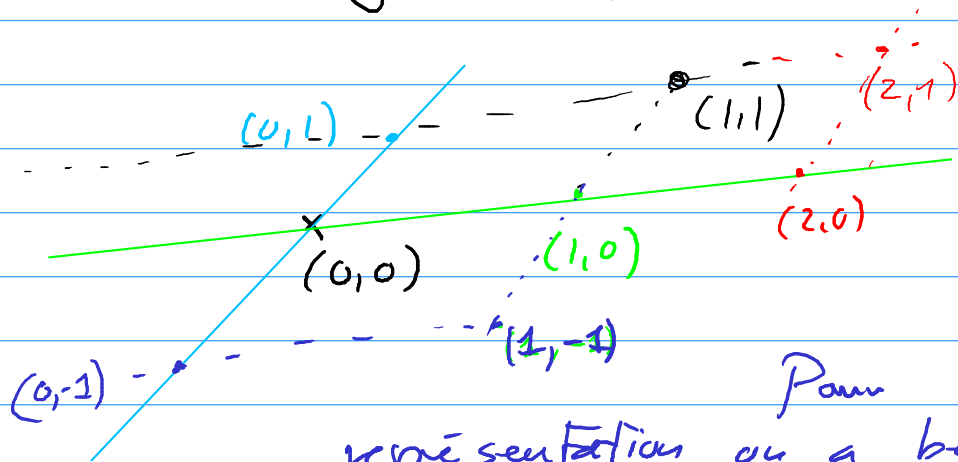
Déf: $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des paires ordonnées (x, y) avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

Exemples: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(3, -8)$,
 $(\sqrt{2}, 1)$, (π, e) , ...

addition: $(x, y) + (a, b) := (x+a, y+b)$
multiplication: $(x, y) \cdot \lambda = \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$

Représentation géométrique:



Pour faire cette représentation on a besoin de choisir une "grille" i.e. une origine et deux axes.

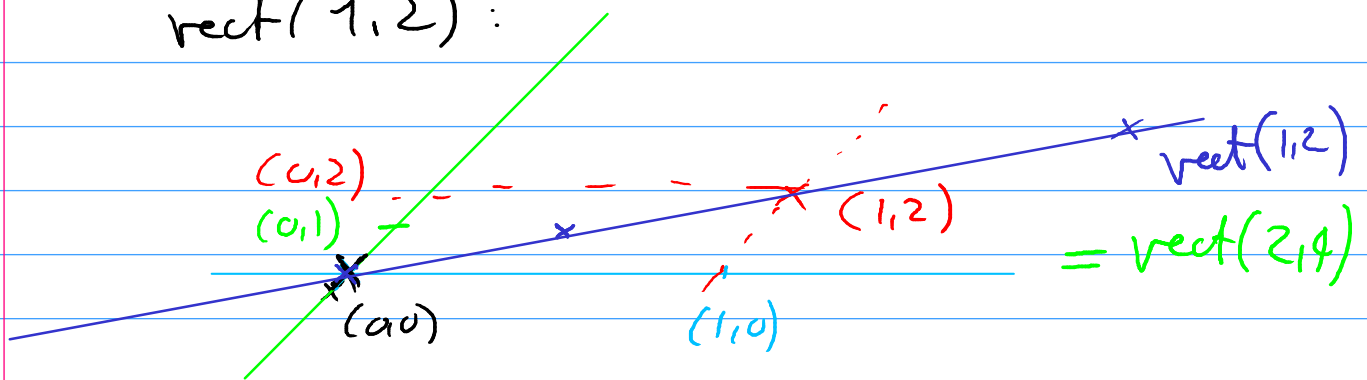
§2.2. Droites dans $\mathbb{R}^2$

Def: Une droite dans $\mathbb{R}^2$ est un ensemble de couples ordonnés (x, y) tous proportionnels entre eux

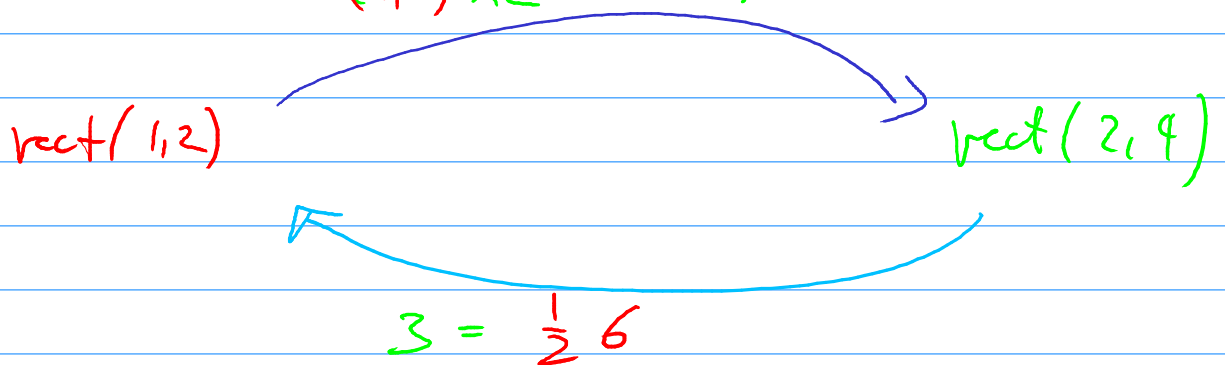
Exemple: (a) $\{ (0,0), (3,1), (6,2), (9,3), (1, \frac{1}{3}), (-1, -\frac{1}{3}), (-2, -\frac{2}{3}), \dots \}$
 $= \text{vect}((3,1)) = \text{vect}((1, \frac{1}{3})), \dots$
générateurs de la droite.

$$(b) \text{vect}((0,0)) = \{ (x,y) \mid (x,y) = \lambda(0,0), \lambda \in \mathbb{R} \} \\ = \{ (0,0) \}$$

(c) représentation géométrique de $\text{vect}(1,2)$:



Mais: $(6,12) = 6(1,2) = 3(2,4)$
 $(1,2) \times 2 = (2,4)$



$$(6,12) = 6(1,2) = 3 \times (2,4) \\ = \underbrace{3 \times 2}_{\left(=\frac{6}{2}\right)} \times (1,2) \\ \left(=\frac{6}{2}\right) (= (2,4))$$

Dans cet exemple, on note $[(6,12)]_{(1,2)} = 6$,
 $[(6,12)]_{(2,4)} = 3$

Représentation par une équation:

$$\begin{aligned}\text{vect}(1,2) &= \{(x,y) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \lambda(1,2) = (x,y)\} \\ &= \{(x,y) \mid \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0\} \\ &= \{(x,y) \mid \boxed{2x - y = 0}\}\end{aligned}$$

description par une équation

Exemples: (a) $d = \{(\underline{3}, \underline{1}), (\underline{6}, \underline{2}), (-3, -1), \dots\}$
 $= \text{vect}(3,1).$

eq. de d : $3x - y = 0 \Rightarrow 3 - 1 = 0 \checkmark$
 $\boxed{x - 3y = 0} \Rightarrow 3 - 3 \cdot 1 = 0 \checkmark$

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 3y = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} x & 6 \\ y & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 6y = 0$$

(b) $d: 7x + 3y = 0$

On voit que $(3, -7)$ est solution

Donc, $d = \text{vect}(3, -7)$

$$v_0, v_1, \forall v \in d, \quad v = v_1 \circ l_1 = v_2 \circ l_2$$

$$\begin{aligned}
 &= v_1 \cdot [v]_{v_1} = \underbrace{v_2}_{\text{base}} \cdot \underbrace{[v]_{v_2}}_{\text{coordonnée}} \\
 &= b \cdot [v]_b
 \end{aligned}$$

(c) d: $5x + 3y = 0$

cette équation peut se voir comme un produit scalaire entre $(5, 3)$ et (x, y) .

C'est l'ensemble des $(x, y) \perp$ à $(5, 3)$

En général, $ax + by = 0$ est la droite $\perp$ à (a, b) , et dirigée (généralisée) par $(b, -a)$

§2.3. Bases dans $\mathbb{R}^2$:

Fixons $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Regardons

$$V = \text{vect}(v_1, v_2) := \{ t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$$

• si $v_1 = (d_1, \beta_1)$, $v_2 = (d_2, \beta_2)$ et

$$\begin{vmatrix} d_1 & \beta_1 \\ d_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ alors } V \text{ est une}$$

droite généralisée par (d_1, β_1) (si $\neq (0, 0)$)
d'équation $\beta_1 x - d_1 y = 0$

• sinon, $V = \mathbb{R}^2$

Dépendance de la base:

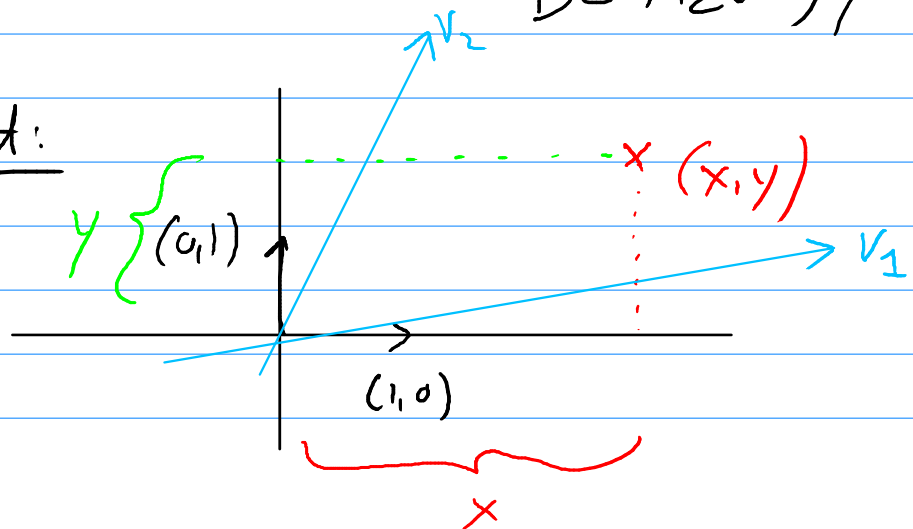
$$\begin{aligned}(x, y) &= x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) \\ &= \underbrace{((1, 0), (0, 1))}_{\text{Base canonique}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{[(x, y)]_{B.C.}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{x}{2} (2, 0) + y (0, 1) \\ &= ((2, 0), (0, 1)) \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ y \end{pmatrix} \\ &\quad [(x, y)]_{\{(2, 0), (0, 1)\}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(-x)(-1, 0) + \left(\frac{y}{3}\right)(0, 3) \\ \Rightarrow [(x, y)]_{\{(-1, 0), (0, 3)\}} &= \begin{pmatrix} -x \\ \frac{y}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{((1, 0), (0, 1))}_{B} \cdot \underbrace{B^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ B \in M_2(\mathbb{R}), \det(B) \neq 0}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Graphiquement:



On cherche t_1, t_2 d.g. $t_1 v_1 + t_2 v_2 = (x, y)$

$$\text{On a } v_1 = 4 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$$

$$v_2 = 1 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1)$$

$$[v_1]_{b.c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [v_2]_{b.c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$[v_1]_{\{v_1, v_2\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [v_2]_{\{v_1, v_2\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quelle est $B \in M_2(\mathbb{R})$ d.g.

$$B [v_1]_{\{v_1, v_2\}} = [v_1]_{b.c.}$$

$$\text{et } B [v_2]_{\{v_1, v_2\}} = [v_2]_{b.c.}$$

$$\text{on a } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

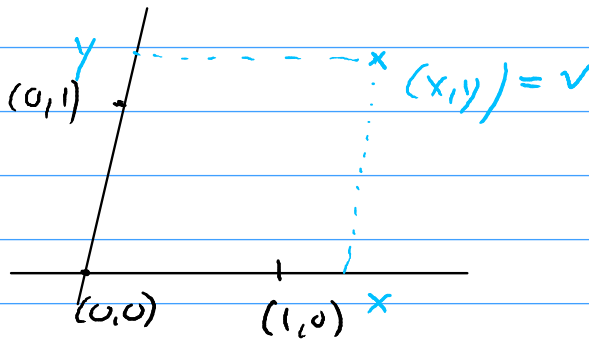
$$\begin{aligned} \Rightarrow [(x, y)]_{b.c.} &= B \cdot [(x, y)]_{\{v_1, v_2\}} \\ &= B \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [(x, y)]_{\{v_1, v_2\}} = B^{-1} [(x, y)]_{b.c.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exemples:

(a) $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$

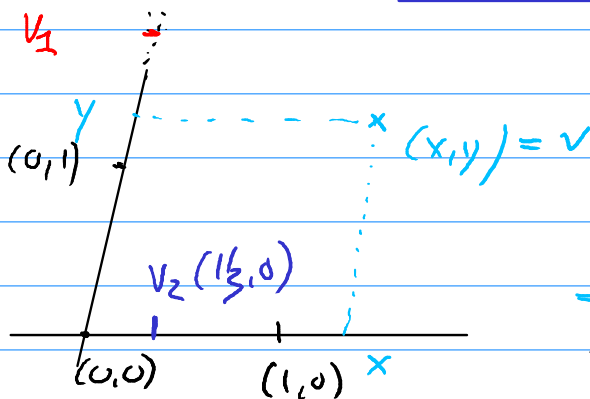


$$v = x(1,0) + y(0,1) \\ = x v_1 + y v_2$$

composantes de v
dans la b.c. :

$$[v]_{B.c.} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(b) $v_1 = (0, 2)$, $v_2 = (1/3, 0)$



v_1, v_2 forment
une base de $\mathbb{R}^2$,

car ils sont lin. indép.

$$\underline{v} = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) \\ = \underbrace{x}_{y'} \cdot \underbrace{(1/3, 0)}_{v_2} + \underbrace{y}_{x'} \cdot \underbrace{(0, 2)}_{v_1}$$

$$\Rightarrow [v]_B = [v]_{v_1, v_2} \\ = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y/2 \\ 3x \end{pmatrix}$$

⚠ $\nRightarrow v = (y/2, 3x)$ c'est faux

(c) $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$. ces vecteurs
forment une base B

$$v = x(1,0) + y(0,1)$$

$$v = x v_1 + y (v_2 - v_1)$$

$$= \underbrace{(x-y)}_{x'} v_1 + \underbrace{y}_{y'} v_2$$

$$\rightarrow \underline{[v]}_B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$$

Cas général:

$$v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$v_2' = \gamma v_1 + \delta v_2$$

(avec v_1, v_2 la base can.)

$$\text{On a } v = x' v_1' + y' v_2' = (v_1' \ v_2') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= x v_1 + y v_2 = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ecrivons

$$(v_1' \ v_2') = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

P inversible

On a donc

$$v = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{(v_1 \ v_2) P}_{(v_1' \ v_2')} \cdot \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

$$= (v_1' \ v_2') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [v]_B$$

Def. Soient $v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2$
 $v_2' = \gamma v_1 + \delta v_2$.

On appelle la matrice de changement de base la matrice

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

En fait, $P = \left([v_1']_{B.c.} \quad [v_2']_{B.c.} \right)$

Def. la matrice de changement de coordonnées,
(si P est la matrice de chang. de base) est

$$Q := P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}^{-1}$$

Proposition: Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, on a

$$[v]_{B'} = Q [v]_B \quad \text{si}$$

B et B' sont des bases et P est la matrice de chang. de bases

preuve: si $[v]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $[v]_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
 \text{alors } v &= (v_1, v_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{(v_1, v_2)} \underline{P} \cdot \underline{P^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \underline{(v_1', v_2')} \underline{Q} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (v_1', v_2') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \square.
 \end{aligned}$$

En résumé:

$$\begin{array}{ccc}
 (v_1', v_2') & \xleftarrow{P} & (v_1, v_2) \\
 [v]_B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \xrightarrow{Q=P^{-1}} & [v]_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Exemples: (a) $B' = (3, 1), (-1, 1)$

$v_1' \qquad \qquad \qquad v_2'$

et $[v]_{B.C.} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{change de Base}$$

$$[v_1']_{B.C.} \quad \quad \quad [v_2']_{B.C.}$$

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{change de coordonnées.}$$

$$\Rightarrow [v]_{B'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

A savoir:

$$1) \quad v = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$2) \quad v = (v_1 \ v_2) P \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$3) \quad P = \left([v_1]_{B.c.} \ [v_2]_{B.c.} \right)$$

Remarque: Si Q est la matrice de
changement de coordonnées de B vers B' ,
alors Q^{-1} , i.e. P , est la matrice
de changement de coord. de B' vers B .

§2.4. Droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$

Def: Soit $v_1 \in \mathbb{R}^3$ ($v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$)
la droite vectorielle engendrée par v_1 est l'ensemble

$$V := \text{vect}(v_1) = \{ t_1 v_1 \mid t_1 \in \mathbb{R} \}$$

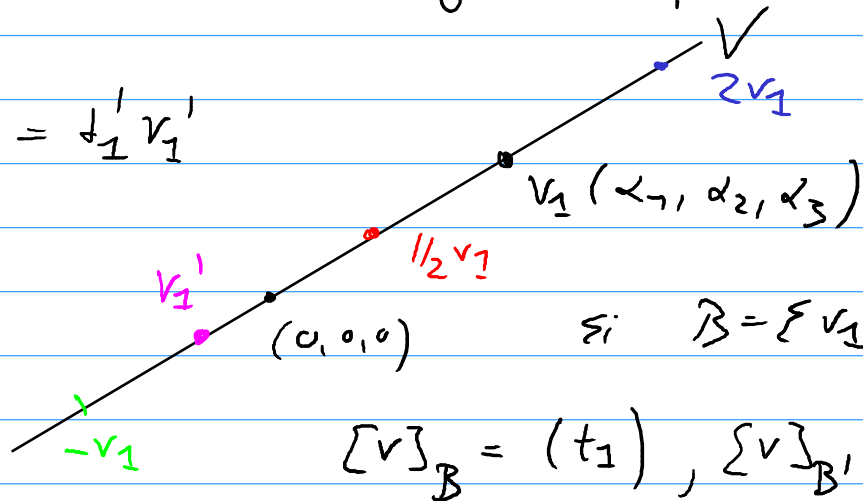
On distingue deux cas:

1) $v_1 = (0, 0, 0)$. A ce moment là

$$V = \text{vect}(v_1) = \{v_1\}$$

2) $v_1 \neq (0, 0, 0)$ alors géométriquement:

$$v = t_1 v_1 = t_1' v_1'$$



$$\text{si } B = \{v_1\}, B' = \{v_1'\}$$

$$[v]_B = (t_1), [v]_{B'} = (t_1')$$

Description de V à l'aide d'équation:

$$v \in V = \text{vect}(v_1) \Rightarrow [v]_B = (x, y, z) = t_1 (\underbrace{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}_{v_1})$$

si $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$

$$\frac{x}{\alpha_1} = \frac{y}{\alpha_2} = \frac{z}{\alpha_3}$$

$\alpha_1 = 0, \alpha_2 \neq 0 \neq \alpha_3$

$$\frac{y}{\alpha_2} = \frac{z}{\alpha_3} \text{ et } \underline{x=0}$$

$\alpha_1 = 0 = \alpha_2$
 $\alpha_3 \neq 0$
 $x = y = 0$

Autre manière:

Dire que (x, y, z) est proportionnel à $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est équivalent à $\text{rg}(A) = 1$ où

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

qui est équivalent à

$$0 = \begin{vmatrix} x & y \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z \\ \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$0 = \alpha_2 x - \alpha_1 y$$

$$0 = \alpha_3 x - \alpha_1 z$$

Exemples: (a) $v_1 = (3, -1, 2)$

Décrire $V = \text{vect}(v_1)$ par des équations:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{-1} \\ \frac{x}{3} = \frac{z}{2} \end{cases} \quad \left\| \begin{array}{l} (x, y, z) \in V \\ (x, y, z) = (3, -1, 2) \frac{x}{3} \\ = (3, -1, 2) (-y) \\ = (3, -1, 2) \frac{z}{2} \end{array} \right.$$

↑ intersection de deux plans

(b) $\begin{cases} y = 0 \\ 5x + 4z = 0 \end{cases}$ sont des équations qui décrivent la droite $V = \text{vect}(v_1)$, où $v_1 = (4, 0, -5)$

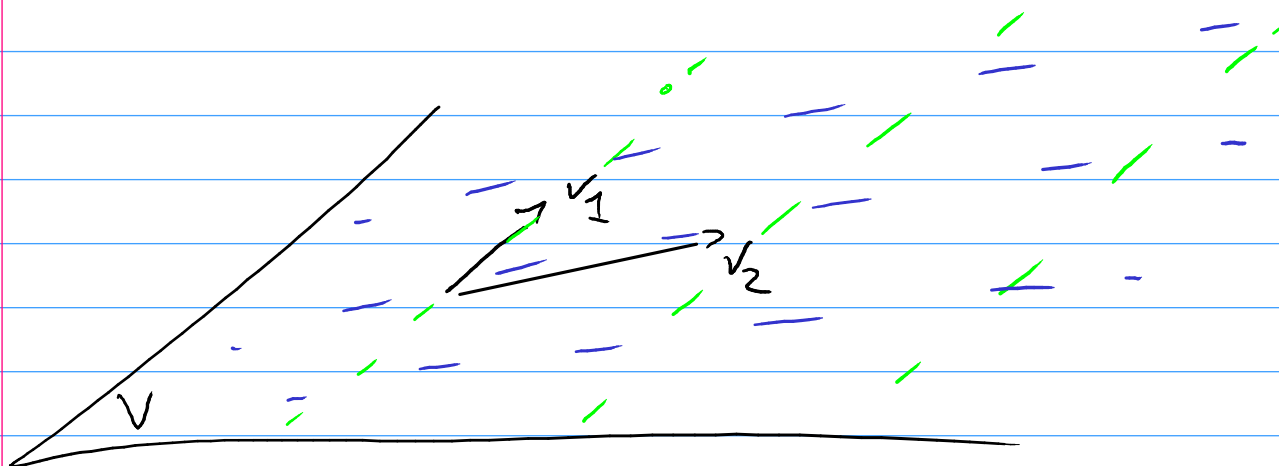
§2.5. Plans vectoriels dans $\mathbb{R}^3$

Déf. Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. le plan vectoriel généré par v_1 et v_2 est

$$V = \{ t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$$

Deux cas:

- v_1 et v_2 sont colinéaires.. A ce moment-là, V est une droite.
- v_1 et v_2 sont indépendants:



V est un espace vectoriel à 2 dimensions

$$\begin{aligned} B = v_1, v_2 & \xrightarrow{(v'_1, v'_2) = (v_1, v_2) P} B' = v'_1, v'_2 \\ [v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}} [v]_{B'} = \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec $P \cdot Q = \mathbb{I}_2$

Rappel:

$$\left. \begin{aligned} \exists i \quad v &= t_1 v_1 + t_2 v_2 \\ \text{et} \quad &= t'_1 v'_1 + t'_2 v'_2 \\ \text{et} \quad v'_1 &= \alpha v_1 + \beta v_2 \\ v'_2 &= \gamma v_1 + \delta v_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \\ Q &= P^{-1} \end{aligned}$$

$$V = (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \underline{(v_1 \ v_2) P} \cdot \underline{P^{-1} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}}$$

$$= (v_1' \ v_2') \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}$$

Description de V à l'aide d'une équation:

$$V = \text{vect}(v_1, v_2), \quad v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$v_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$V \ni v = (x, y, z)$$

Donc,

$$V \ni (x, y, z) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = x \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Exemples:

(a) équation de V $2x - y + z = 0$

$$V \ni (x, y, z) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 2x + z, z)$$

$$= x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad \text{car}$$

(b) équation de V $2x - y + z = 0$

$$V \ni (x, y, z) \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, y - 2x)$$

$$= x(1, 0, -2) + y(0, 1, 1)$$

$$[v]_{B'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ avec } B' = \underbrace{(1, 0, -2)}_{v_1'}, \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_2'}$$

$$\begin{cases} v_1' = v_1 - 2v_2 \\ v_2' = 0v_1 + 1v_2 \end{cases} \Leftrightarrow (v_1' \ v_2') = (v_1 \ v_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_P$$

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifions: $[v]_B = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}, [v]_{B'} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{Mais } Q \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \checkmark$$

$$y = 2x + z$$

(c) $v: 2x - y + z = 0$

$$v_1'' = (1, 1, -1), (-1, 1, 3) = v_2''$$

$$B = \begin{pmatrix} \underbrace{v_1}_{(1, 2, 0)} \\ \underbrace{v_2}_{(0, 1, 1)} \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$v_1'' = v_1 - v_2$$

$$v_2'' = -v_1 + 3v_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

vérifier

$$(v_1'' \ v_2'') = (v_1 \ v_2) P$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [v]_{B''} = P^{-1} [v]_B$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle_{B''} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3x + z \\ x + z \end{vmatrix}$$

Vérifiés:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}(3x+z)\right) v_1'' + \frac{1}{2}(x+z) v_2'' \\ &= \frac{1}{2}(3x+z)(1, 1, -1) + \frac{1}{2}(x+z)(-1, 1, 3) \\ & \quad \text{(décomposition sur } \mathcal{B}'') \\ &= \frac{1}{2}(3x+z-x-z, 3x+z+x+z, -3x-z+3x+3z) \\ &= (x, 2x+z, z) = (x, y, z) \quad \checkmark \\ & \quad \text{--- } y = 2x+z \end{aligned}$$

(d) Calculer l'équation par le plan
 $V = \text{vect}((3, 1, -2), (5, -3, 6))$

$$\Rightarrow (x, y, z) \in V$$

$$\Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 16 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ x & y & z+2y \end{vmatrix}$$

$$= (z + 2y) \mid -9 - 5 \mid = -14(z + 2y)$$

$$\Rightarrow \boxed{z + 2y = 0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{si } \vec{n} = (0, 2, 1) \\ \text{alors } \vec{n} \text{ est } \perp \\ \text{au plan.} \end{array} \right)$$

§2.6. Intersection de deux plans vectoriels

On se donne deux plans:

$$V: ax + by + cz = 0 \quad , \quad V': a'x + b'y + c'z = 0$$

Prop. $V = V'$ ssi (a, b, c) est proportionnel à (a', b', c')

preuve: Si on a proportionnalité entre (a, b, c) et (a', b', c') ,
il est clair que $ax + by + cz = 0$
 $\Leftrightarrow a'x + b'y + c'z = 0$

Donc, $V = V'$.

Si $V = V'$. On voit que

$$\begin{cases} (b, -a, 0) \in V \\ (c, 0, -a) \in V \\ (0, c, -b) \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'b - b'a = 0 \\ a'c - c'a = 0 \\ b'c - c'b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} a' & a \\ c' & c \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} b' & b \\ c' & c \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} a' & a \\ b' & b \\ c' & c \end{pmatrix} \leq 1$$

§1.7.

$\Rightarrow (a, b, c)$ est proportionnel à (a', b', c')
 $\square$

L'intersection de V avec V' est donnée par

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ \text{et} \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

- Soit $(a, b, c) \sim (a', b', c')$. A ce moment-là $V = V'$ et $V \cap V' = V$, un plan.
- Soit $(a, b, c) \not\sim (a', b', c')$. Alors $V \cap V'$ décrit une droite dans $\mathbb{R}^3$.

Prop: On a $V \cap V' = \text{vect}(v_1)$ où

$$v_1 = \left(\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \right)$$

preuve: Si $(a, b, c) \not\sim (a', b', c')$ alors un de ces trois déterminants ne peut pas être nul. Donc $v_1 \neq (0, 0, 0)$.

De plus:

$$\begin{aligned} & a \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \textcircled{a} & a & a' \\ b & b & b' \\ \textcircled{c} & c & c' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a' \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} + c' \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a' & a & a' \\ b' & b & b' \\ c' & c & c' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 \in V' \end{aligned}$$

Exemple:

$$V: x - 3y + z = 0$$

$$V': 2x + y + 3z = 0$$

$$(a, b, c) = (1, -3, 1), (a', b', c') = (2, 1, 3)$$

$$V \cap V' \ni v_1 = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ = (-10, -1, 7)$$

$$(x, y, z) \in V \cap V' \Leftrightarrow (x, y, z) = t(10, 1, -7) \\ (\text{avec } t=y)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{10} = y \\ \frac{z}{-7} = y \end{cases}$$

On peut aussi résoudre

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 7y + z = 0 \end{cases}$$

$l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$

$$l_1 \leftarrow l_1 - l_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{x - 10y} = 0 \\ 7y + z = 0 \end{cases}$$

§ 2.7. Bases dans $\mathbb{R}^3$

Soyent

$$v_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$
$$v_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$
$$v_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

$$V = \text{vect}(v_1, v_2, v_3) = \{ t_1 v_1 + t_2 v_2 + t_3 v_3 \mid t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \}$$

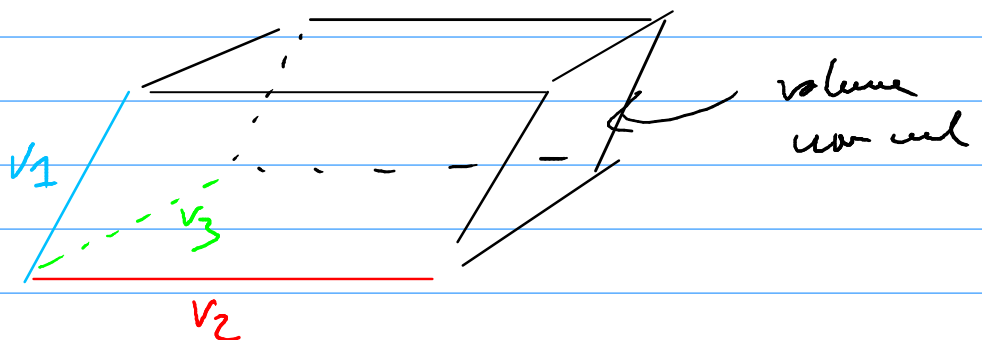
• Soit v_1, v_2, v_3 sont liés.

$$\Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$$

A ce moment-là, $V = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ est un plan ou une droite dans $\mathbb{R}^3$.

• Soit v_1, v_2, v_3 sont lin. indépendants.

A ce moment là, v_1, v_2, v_3 forment une base B de $\mathbb{R}^3$.



De plus, $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \text{volume}$

Changement de bases:

chgmt de base

$$(v'_1, v'_2, v'_3) = (v_1, v_2, v_3) P$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = v_1, v_2, v_3 \\ [v]_B = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \boxed{Q = P^{-1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} B' = v'_1, v'_2, v'_3 \\ [v]_{B'} = \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \\ t'_3 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$v = (x, y, z)$

chgmt de coordonnées

$$P = \left([v'_1]_B \mid [v'_2]_B \mid [v'_3]_B \right)$$

Exemples: (a) $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$
base canonique

$$\text{si } v = (x, y, z) \quad [v]_{B.c.} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$v = x v_1 + y v_2 + z v_3$$

(b) $v_1 = (3, 0, 0), v_2 = (0, 0, 1/2), v_3 = (0, -1, 0)$

$$v = (x, y, z) = \frac{x}{3} v_1 + 2z v_2 + (-y) v_3$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x/3 \\ 2z \\ -y \end{pmatrix}$$

Systématique:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $[v_1]_{B.c.} \quad [v_2]_{B.c.} \quad [v_3]_{B.c.}$

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vécteurs: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/3 \\ 2z \\ -y \end{pmatrix}$

(c) $v_1 = (-1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 1)$, $v_3 = (1, 0, 2)$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = Q = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 4x - y + 2z \\ -2x + 3y - z \\ -x - y + 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ (x, y, z) &= \left(\frac{-4x + y - 2z}{5} \right) (-1, 1, 1) \\ &+ \left(\frac{2x - 3y + z}{5} \right) (0, 2, 1) \\ &+ \left(\frac{x + y - 2z}{5} \right) (1, 0, 2) \end{aligned}$$

décomposition
de v dans
 B

◦ L'équation du plan $V = \text{vect}(v_1, v_2)$

$$(x, y, z) \in V \Leftrightarrow (x, y, z) = t_1 v_1 + t_2 v_2 + 0 v_3$$

$$\Leftrightarrow \underline{x + y - 2z = 0}$$

◦ l'eq. de $\text{vect}(v_1, v_3)$:

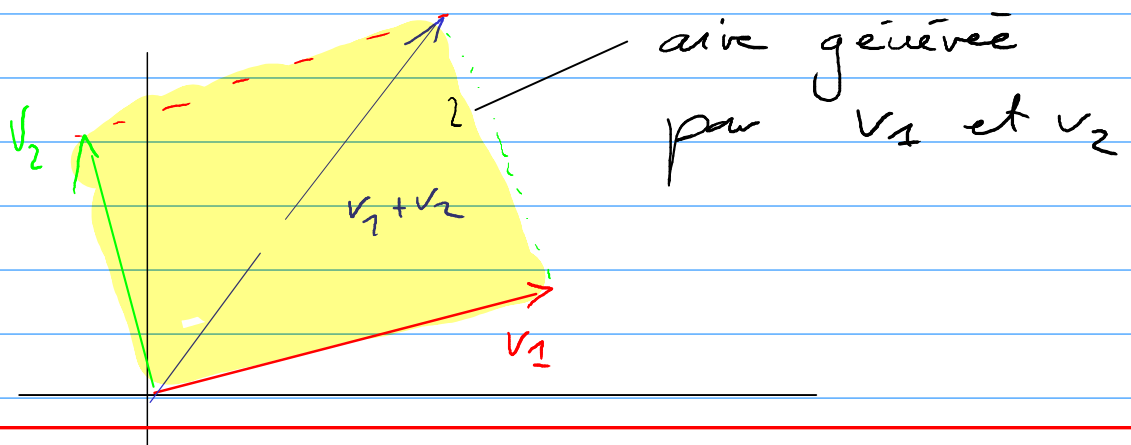
$$\underline{2x - 3y + z = 0}$$

◦ l'eq. de $\text{vect}(v_2, v_3)$:

$$\underline{-4x + y - 2z = 0}$$

§2.8. Interprétation géométrique du déterminant

Soient v_1, v_2 dans le plan



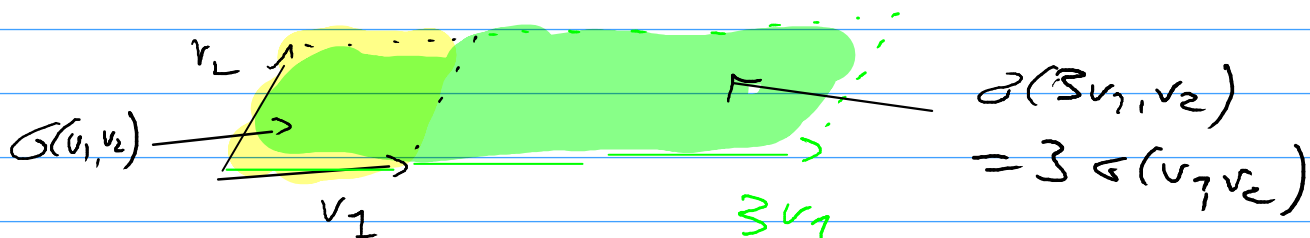
Déf: l'aire orientée générée par v_1 et v_2

est $\sigma(v_1, v_2) = \begin{cases} \text{aire générée par } v_1 \text{ et } v_2 \\ \text{si } v_1 \text{ et } v_2 \text{ sont orientés} \\ \text{trigonométriquement} \\ \bullet - \text{aire générée sinon} \end{cases}$

Propriétés: (1) $\sigma(v_1, v_2) = -\sigma(v_2, v_1)$

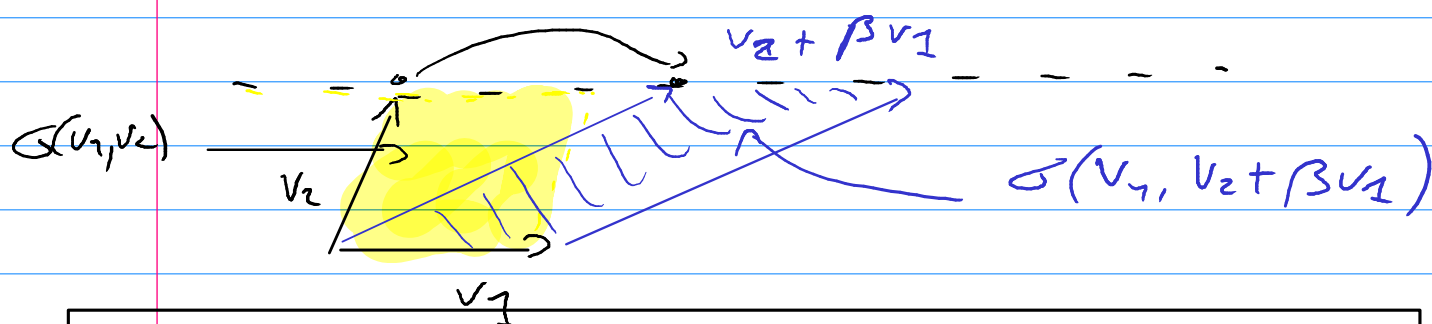
$$(2) \quad \sigma(\alpha v_1, v_2) = \alpha \sigma(v_1, v_2)$$

$$\sigma(v_1, \beta v_2) = \beta \sigma(v_1, v_2)$$



$$(3) \quad \sigma(v_1, v_2 + \alpha v_1) = \sigma(v_1, v_2)$$

$$\sigma(v_1 + \beta v_2, v_2) = \sigma(v_1, v_2)$$



Prop: Soient v_1, v_2, v_1', v_2' d.g.

$$v_1' = \alpha v_1 + \beta v_2$$

$$v_2' = \gamma v_1 + \delta v_2$$

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \sigma(v_1', v_2') = \det P \sigma(v_1, v_2)$$

preuve:

$$(1) \quad \sigma(v_1', v_2') = \sigma(\alpha v_1 + \beta v_2, \gamma v_1 + \delta v_2)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \alpha \sigma\left(v_1 + \frac{\beta}{\alpha} v_2, \gamma v_1 + \delta v_2\right)$$

$\alpha \neq 0$

$$\stackrel{(3)}{=} \alpha \left(v_1 + \frac{\beta}{\alpha} v_2, \gamma v_1 + \delta v_2 - \gamma \left(v_1 + \frac{\beta}{\alpha} v_2 \right) \right)$$

$$= \alpha \sigma \left(v_1 + \frac{\beta}{\alpha} v_2, \sigma v_2 - \frac{\gamma \beta}{\alpha} v_2 \right)$$

$$\stackrel{(3)}{=} \alpha \sigma \left(v_1, v_2 \left(\sigma - \frac{\gamma \beta}{\alpha} \right) \right) \stackrel{(1)}{=} \alpha \left(\sigma - \frac{\gamma \beta}{\alpha} \right) \sigma(v_1, v_2)$$

$$= \det P \sigma(v_1, v_2) \quad \square$$

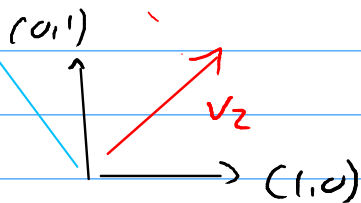
Exemples: (a) $v_1 = (x, y)$, $v_2 = (z, t)$

$$v_1 = x(1, 0) + y(0, 1)$$

$$v_2 = z(1, 0) + t(0, 1), \quad P = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

$$\sigma(v_1, v_2) = \det P \sigma((0, 1), (1, 0)) = \det P$$

(b) $v_1 = (-1, 2)$, $v_2 = (1, 1)$



$$\sigma(v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

(aire géométrique = 3)

(c) $\sigma(v_1, v_2) = 0 \iff v_1$ et v_2 sont colinéaires

$$\iff \det(v_1, v_2) = 0$$

§2.9. droites (affines) dans $\mathbb{R}^2$

Si $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors l'équation d'une droite affine est

$$ax + by = c$$

(on a pas forcément)

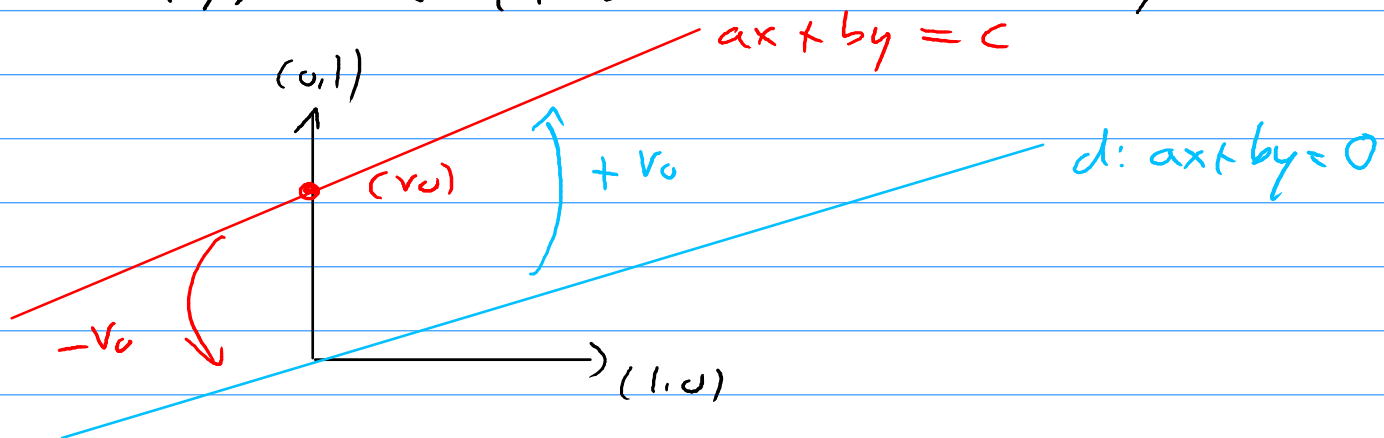
Solutions possibles à $ax + by = c$:

$$\left(\frac{c}{a}, 0\right), \left(\frac{c}{a} - b, a\right), \left(\frac{c}{a} - 2b, 2a\right),$$

$$\left(\frac{c}{a} - tb, ta\right)$$

On trouve (x, y) solution ssi

$$(x, y) = \left(\frac{c}{a}, 0\right) + t(-b, a), t \in \mathbb{R}$$



Une droite affine s'écrit alors comme

$$V = v_0 + \text{vect}(v_1), \text{ où } v_1 \text{ est}$$

sur la droite vectorielle donnée par

$$ax + by = 0 \quad (\text{p.ex. } v_1 = (-b, a))$$

$$v_0 = \left(\frac{c}{a}, 0\right)$$

Exemples : (a) d: $3x + y = 4$

• sol. spéciale : $(x_0, y_0) = (4/3, 0)$

• sol. générale : $(4/3, 0) + t \underbrace{(1, -3)}_{v_1}$

Explication alternative:

Soit $d: \underline{ax + by = c}$

Soient deux solutions $s_1 = (x, y)$, $s_2 = (x', y')$.

On a donc

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ ax' + by' = c & (2) \end{cases}$$

La différence donne alors $(2) - (1)$:

$$ax' - ax + by' - by = c - c = 0$$

$$a(x' - x) + b(y' - y) = 0$$

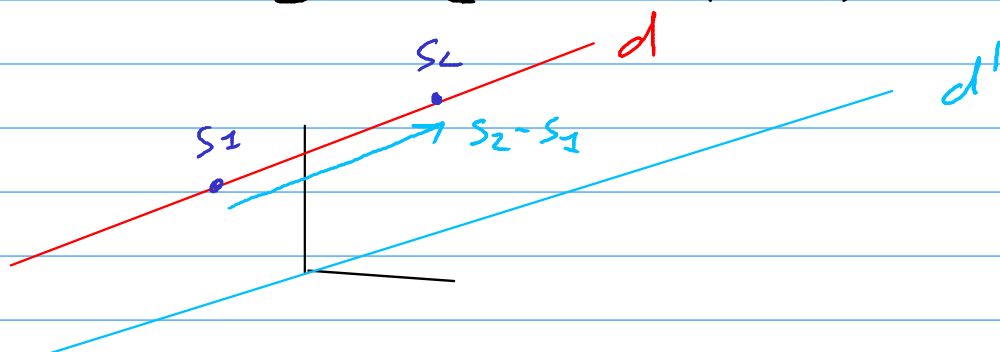
Donc, $s_2 - s_1 \in d'$ où

$$d': ax + by = 0$$

Donc, $s_2 - s_1 \in \text{vect}(b, -a)$

Ainsi $s_2 - s_1 = t(b, -a)$

et $s_2 = s_1 + t(b, -a)$



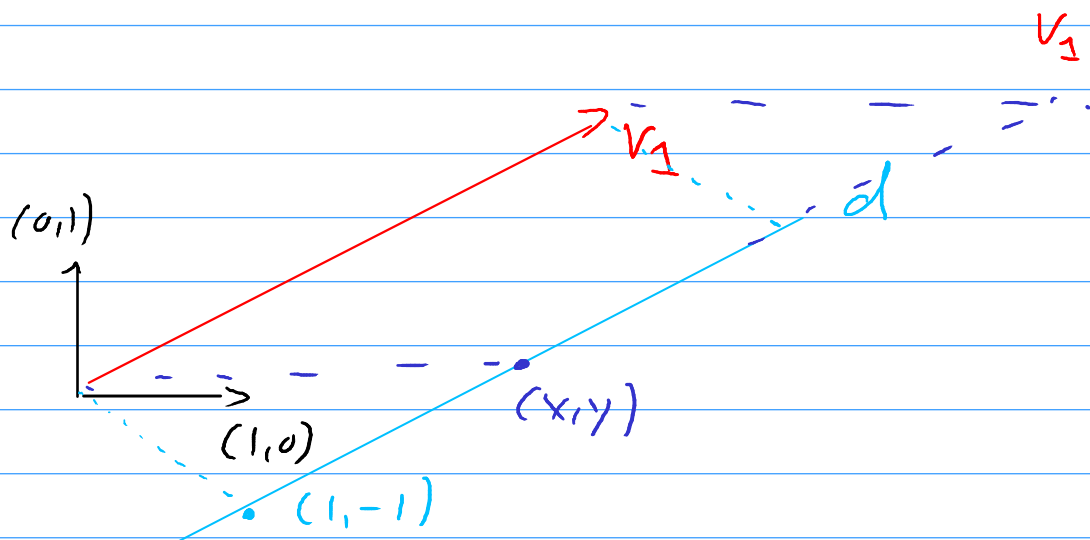
Lien avec le déterminant:

$$d: 2x - 3y = 5$$

Solution particulière:

$$s_0 = (1, -1)$$

Solution générale: $(x, y) = (1, -1) + t(3, 2)$



$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ y & 2 \end{vmatrix}$$

$s_1 \quad \quad \quad v_1 \quad \quad \quad s \quad \quad \quad v_2$

$$\Rightarrow \underline{s = 2x - 3y}$$

Exemple: On cherche la droite d qui passe par $(1, 3), (2, 5)$

vecteur directeur: $(2, 5) - (1, 3) = (1, 2)$

$$d: \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

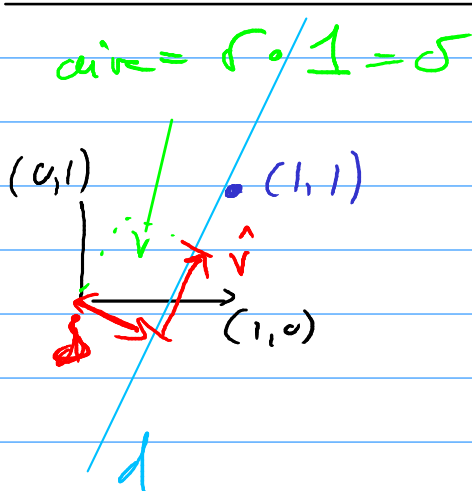
$$\Leftrightarrow \underline{2x - y = -1}$$

(b) Trouver la droite qui passe par $(-2, 1)$ et parallèle à $(2, 3)$:

$$\begin{array}{c} \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{\text{aire générée par } (-2, 1) \text{ et } (2, 3)} = \begin{vmatrix} x & 2 \\ y & 3 \end{vmatrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{aire générée par } (x, y) \text{ et } (2, 3)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \underline{-8 = 3x - 2y}$$

(c) distance entre d: $3x - y = 2$ et $(0, 0)$



vector directeur:

$$V = (1, 3)$$

normalisé:

$$\underline{\underline{\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, 3)}}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 1 = 5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{10}}}}$$

§2.10 Plans (affines) dans $\mathbb{R}^3$

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

On pose

$$V := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = \underline{d} \}$$
$$= \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } a \neq 0}}{\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } b \neq 0}}{(0, \frac{d}{b}, 0)}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } c \neq 0}}{(0, 0, \frac{d}{c})}, \underbrace{(1, \mu, \sigma)}_{v_0}, \dots \right\}$$

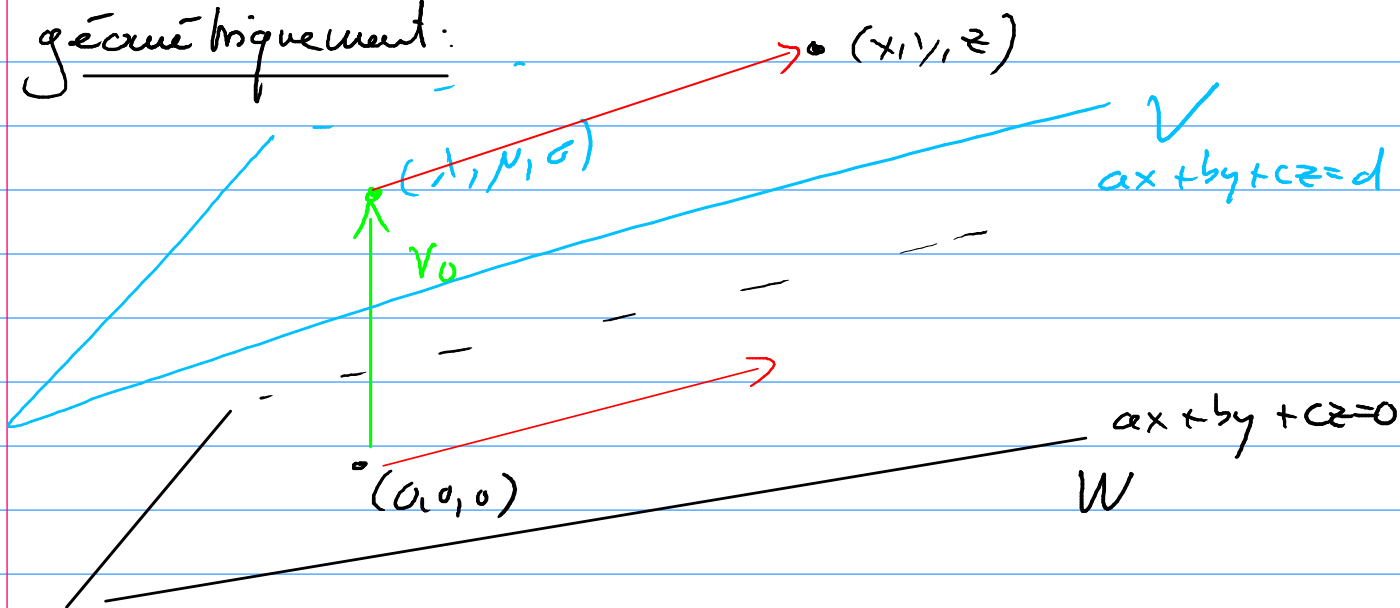
$$v = (x, y, z) \in V$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz = d = ad + b\mu + c\sigma$$

$$\Leftrightarrow a(x - 1) + b(y - \mu) + c(z - \sigma) = 0$$

$\Rightarrow v - v_0 \in W$ qui est un plan vectoriel

géométriquement:



Si $v_1, v_2 \in W$, alors
 $v_0 + v_1, v_0 + v_2 \in V$

On peut donc écrire

$$W = \text{vect}(v_1, v_2)$$

$$V = v_0 + \text{vect}(v_1, v_2)$$

$$= \{ v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$$

description paramétrée de V

V est le plan affine de $\mathbb{R}^3$ contenant v_0 et dirigé par v_1 et v_2 .

Exemples: $V: 2x + y - z = 3$

$$W: 2x + y - z = 0$$

$$v_0 = (1, 1, 0) \in V$$

$$v_1 = (0, 1, 1)$$

$$v_0' = (0, 0, -3) \in V$$

$$v_2 = (1, -1, 1)$$

$$V = \underbrace{(1, 1, 0)}_{v_0} + \text{vect}(\underbrace{(0, 1, 1)}_{v_1}, \underbrace{(1, -1, 1)}_{v_2})$$

$$= \{ \underbrace{(1 + t_2, 1 + t_1 - t_2, t_1 + t_2)}_{v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$(a') \quad V: 2x + y - z = 7$$

$$W: 2x + y - z = 0$$

$$v_0 = \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, 0 \right) \in V$$

$$v_1 = (0, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, -1, 1)$$

$$v_0' = (2, 3, 0) \in V$$

$$V = \left\{ \underbrace{(2, 3, 0)}_{v_0'} + t_1 \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_1} + t_2 \underbrace{(1, -1, 1)}_{v_2} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

v_0 est appelé solution particulière à

$$ax + by + cz = d$$

v_1, v_2 sont des solutions homogènes

$$ax + by + cz = 0$$

(b)

$$V = \left\{ (-2 + t_1 + 2t_2, 3 + 3t_1 - t_2, 1 + t_1 + 3t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$v_0 = (-2, 3, 1)$$

$$v_0' = (0, 9, 3) \quad (t_1 = 2, t_2 = 0)$$

$$v_1 = (1, 3, 1)$$

$$W = \text{vect}(v_1, v_2)$$

$$v_2 = (2, -1, 3)$$

$$W: \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 = x \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{0 = 10x - y - 7z} \quad W$$

V: On substitue $v_0 = (0, 9, 3)$ dans l'eq.
par w:

$$-30 = 10 \cdot 0 - 9 - 7 \cdot (3)$$

$$\Rightarrow \underline{V: 10x - y - 7z = -30}$$

Vérifions avec $(-2, 3, 1)$: ✓

Que dire de $20x - 2y - 14z = -60$?

Description équivalente à la précédente.

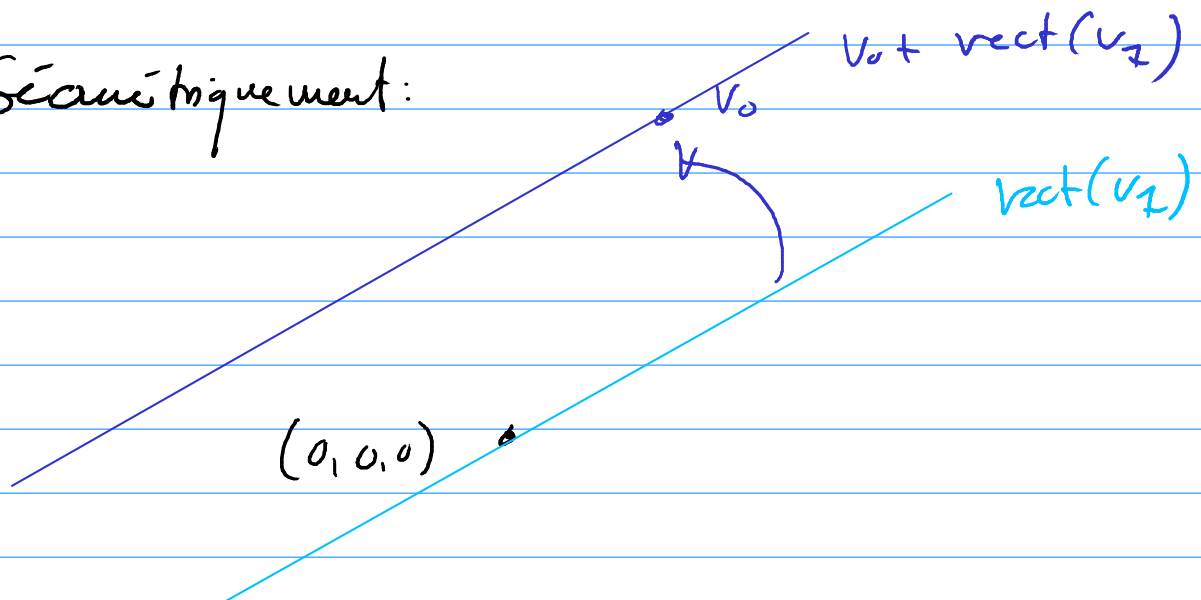
§ 2.11. Droites affines dans $\mathbb{R}^3$

Soient $v_0, v_1 \in \mathbb{R}^3$ avec $v_1 \neq (0, 0, 0)$

Une droite affine serait l'espace

$$V = v_0 + \text{vect}(v_1) = \{v_0 + tv_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Géométriquement:



$$V = (x, y, z) \in V \Leftrightarrow$$

$$(x, y, z) = (\underbrace{1, \mu, 0}_{V_0}) + \underbrace{\lambda (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}_{V_1}$$

• $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$

$$\frac{x-1}{\alpha_1} = t = \frac{y-\mu}{\alpha_2} = \frac{z-0}{\alpha_3}$$

Donc, $\begin{cases} \frac{x-1}{\alpha_1} = \frac{y-\mu}{\alpha_2} \\ \frac{x-1}{\alpha_1} = \frac{z-0}{\alpha_3} \end{cases}$ deux équations

• $\alpha_1 = 0; \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} \frac{y-\mu}{\alpha_2} = \frac{z-0}{\alpha_3} \\ x = 1 \end{cases}$$
 deux équations

• $\alpha_1 = 0 = \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \mu \end{cases}$$

deux équations
pas de contraintes
sur z .

Exemples: (a) $(3, -2, 1) + t(1, 0, 1)$

$$V = \{ (3+t, -2, 1+t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$v_0 = (3, -2, 1)$$

$$v_1 = (1, 0, 1)$$

$$v_0' = (2, -2, 0)$$

$$v_0'' = (4, -2, 2)$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ \frac{x-3}{1} = \frac{z-1}{1} \end{cases}$$

v_0, v_0', v_0'' solutions particulières

v_1 solution homogène.

(b) $V: x = 2y - z = \frac{z}{3}$

sol. part. $(x, y, z) = (0, 2, 0) = v_0$

sol. homogène $(x, y, z) = (1, \frac{1}{2}, 3) = v_1$

différence entre v_0 et $v_0' = (-2, 1, -6)$

$$\Rightarrow v_0 - v_0' \cong v_1$$

$$= (2, 1, 6) \sim (1, \frac{1}{2}, 3) \quad \checkmark$$

3. Applications linéaires $\mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^p$ ($1 \leq u, p \leq 3$)

But: se familiariser avec les applications linéaires et ses caractéristiques.

§ 3.1. Définitions:

Fixons, pour simplifier, u à 3 et $p=2$.

On dit que $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une application linéaire ssi f peut s'écrire comme

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz),$$

où $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Chaque application linéaire f possède une matrice A_f associée

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

En général, si $f: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^p$

alors $A_f \in M(p \times u)$

On a aussi

$$A_f = \begin{pmatrix} \textcircled{a} & \textcircled{b} & \textcircled{c} \\ \textcircled{d} & \textcircled{e} & \textcircled{f} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} [f(0,1,0)]_{B_{\text{can}}} \\ [f(1,0,0)]_{B_{\text{can}}} \\ [f(0,0,1)]_{B_{\text{can}}} \end{matrix}$$

Exemples: (a) application nulle:

$$\mathbb{R}^u \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$(x, y, z) \longmapsto (0, 0, 0)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } u=3=p$$

(b) application identité:

$$(x, y, z) \longmapsto (x, y, z) \quad (\text{il faut que } u=p)$$

$$A_f = I_{u \times u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (2x, 2y)$$

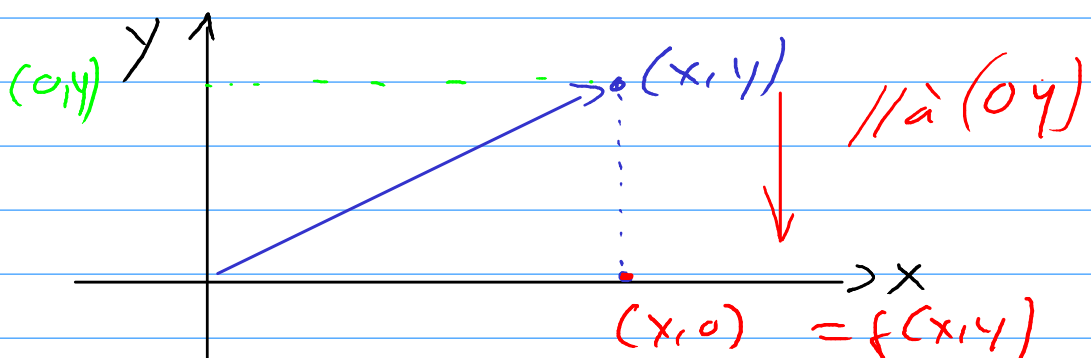
$$; A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c'est une homothétie, de centre $(0, 0)$,
de rapport 2.

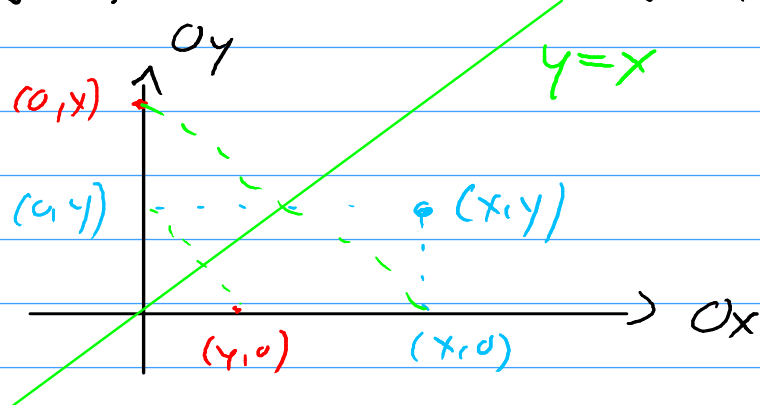
$$(d) f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (x, 0) \quad ; \quad A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c'est une projection de $\mathbb{R}^2$ sur (Ox) , paral-
lèlement à (Oy) :



(e) $J(x,y) = (y,x)$ $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

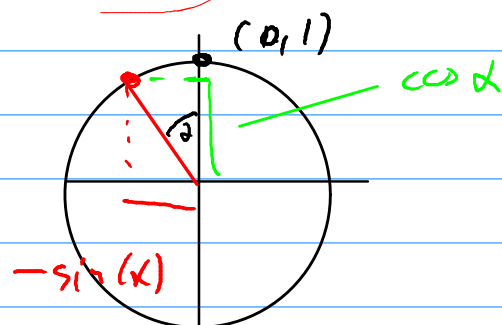
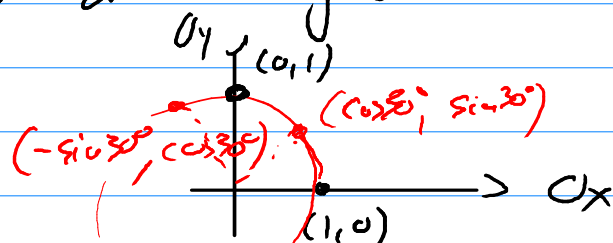


c'est une symétrie d'axe $y=x$

(f) $J(x,y) = (x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ, x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ)$

rotation autour de $(0,0)$ d'un angle 30°

$$A_f = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$



(g) $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (x-y, 3x+2y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ [J(1,0)]_{B_{can}} & [J(0,1)]_{B_{can}} \end{matrix}$$

$$(g) : f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (-2x + 3y + z, x + y - 3z, x - 4y + 2z)$$

composantes
ds Bcan $\rightarrow$

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z) = x \underbrace{(-2, 1, 1)}_{\text{vecteur de } \mathbb{R}^3} + y(3, 1, -4) + z \underbrace{(1, -3, 2)}_{\substack{-2(-2, 1, 1) \\ -1(3, 1, -4)}}$$

$$= (-2x + 3y + z)(1, 0, 0) + (x + y - 3z)(0, 1, 0) + (x - 4y + 2z)(0, 0, 1)$$

$$A_f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 1 & -3 & & & \\ 1 & -4 & 2 & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} -L_2 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$L_1 \quad L_2 \quad -2L_1 - L_2$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x - 2z)(-2, 1, 1) + (y - z)(3, 1, -4) \\ &= (x + y - 3z)(-1, 1, 0) + (x - 4y + 2z)(-1, 0, 1) \end{aligned}$$

§ 3.2. Caractérisation

On dit que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ respecte la structure vectorielle de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ ssi

- $\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$ $f(tv) = t f(v)$
- $\forall v, v' \in \mathbb{R}^n$ $f(v + v') = f(v) + f(v')$

Proposition: Une application

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire ssi
 f respecte la structure vectorielle de
 $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$

Prun: pour fixer les idées on considère
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

• supposons que f est linéaire:

$$f(x, y) = (ax + by), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$f(tx, ty) = (atx + bty) = t(ax + by) = f(x, y) \cdot t$$

$$\begin{aligned} f((x, y) + (x', y')) &= f(x+x', y+y') = a(x+x') + b(y+y') \\ &= ax + by + ax' + by' = f(x, y) + f(x', y') \end{aligned}$$

donc f respecte la structure vectorielle.

• supposons que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ respecte la structure vectorielle.

$$f(x, y) = f(x, 0) + f(0, y) = x \underbrace{f(1, 0)}_a + y \underbrace{f(0, 1)}_b$$

$$= ax + by \quad \text{et}$$

f est linéaire.

□.

§ 3.3. Image et rang

Def. Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire. L'ensemble image de f est

$$\text{im}(f) = \{ f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n \} \subset \mathbb{R}^p$$

ensemble ensemble
de part arrivé

Prop. $\text{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire.

§. 3.4. Noyau

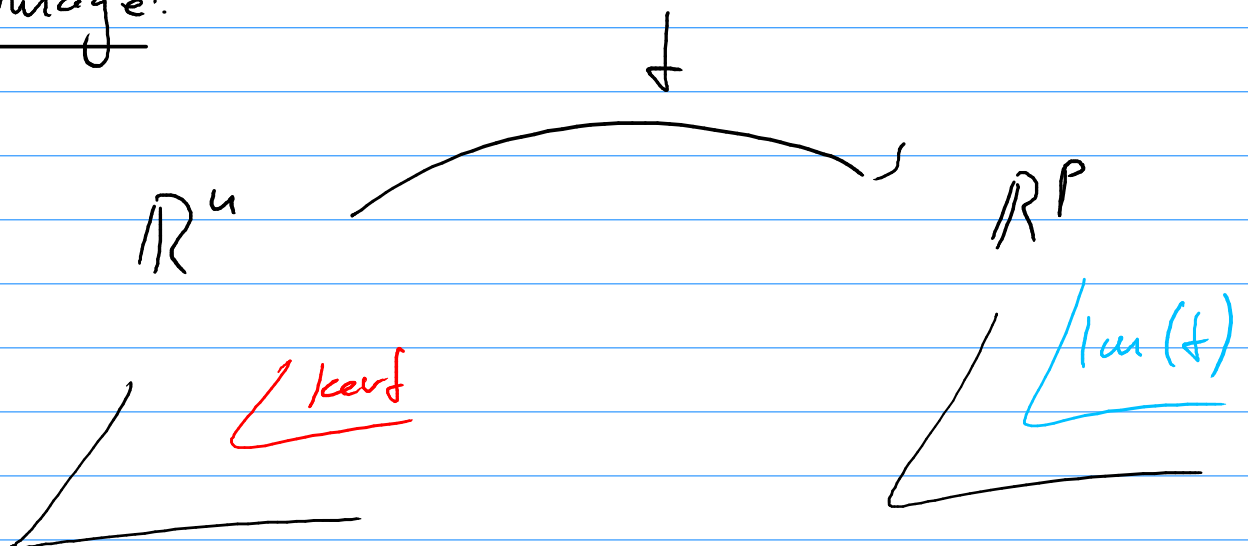
Def: le noyau d'une application linéaire f est donné par

$$\text{ker } f = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = \underbrace{0_{\mathbb{R}^p}}_{(0,0,\dots,0)} \} \subset \mathbb{R}^n$$

ensemblede l'ensemble

de part de f d'arrivée.

Image:



Exemple: (a) $f: (x, y, z) \mapsto (0, y)$
 $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$A_f: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \text{ker}(f) &= \text{plan d'équation : } y = 0 \\ &= \text{vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1)) \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Def: le rang d'une application linéaire $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est le nombre de vecteurs linéairement indépendants dans $\text{Im}(f)$.
 $\text{rg}(f) = \text{dignes indep. endantes de } A_f$

Proposition: $\text{Ker}(f)$ est un SEV (ss-esp. vect.) de $\mathbb{R}^n$
 de dimension $n - r$, où
 $r = \text{rg}(f)$

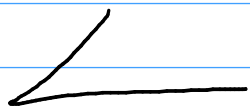
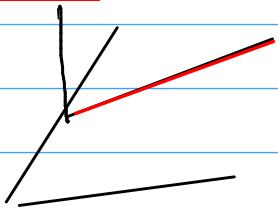
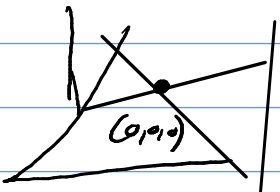
preuve: Fixons les idées en prenant $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

Considétons

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$$

r lignes
indépendantes.

$$\text{Ker } f = \begin{cases} \alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y + \alpha_{1,3}z = 0 \\ \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y + \alpha_{2,3}z = 0 \\ \alpha_{3,1}x + \alpha_{3,2}y + \alpha_{3,3}z = 0 \end{cases}$$

$r=0$	$r=1$	$r=2$	$r=3$
$\text{Im}(f) = (0,0,0)$	$\text{Im}(f)$ est droite	$\text{Im}(f)$ est un plan	$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$
$\text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$	$\text{Ker}(f)$ est un plan	$\text{Ker}(f)$	$\text{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$
			

Exemples :

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (x+3y, 2x+6y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2 \quad \text{rg}(A_f) = 1$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(1,2)$$

$$\text{Ker}(f) = \begin{cases} x+3y=0 \\ 2x+6y=0 \end{cases} = \begin{aligned} &\text{droite d'eq.} \\ &x+3y=0 \\ &= \text{vect}(-3,1) \end{aligned}$$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (2x-y, x+y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{rg}(f) = 2$$

$$\text{Ker}(f) = \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} = \{(0,0)\}$$

$$(c) \quad f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (-2x + 3y + z, x + y - 3z, x - 4y + 2z)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 = -L_2 - L_3 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}(f) = 2$$

$$\ker f: \begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ker(f) = \operatorname{vect}(2, 1, 1)$$

§ 3.5. Décomposition colonne-ligne

Soit $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, linéaire et A_f sa matrice associée

$$A_f = \underbrace{C_1 L_1 + C_2 L_2 + \dots + C_r L_r}_{\text{décomposition minimale}}$$

où $r = \operatorname{rg}(A_f)$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ \vdots \\ \alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{pmatrix} + \dots$$

$$\text{On a } \text{Im}(f) = \text{vect}(v_1, \dots, v_r)$$

$$\text{Ker}(f) = \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \vdots \\ \alpha_r x + \beta_r y + \gamma_r z = 0 \end{cases}$$

Exemples: (a) $f: (x, y, z) \mapsto (2x - 3y + z, -4x + 6y - 2z)$
 $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times (-2)}$$

$$\rightarrow \text{rg}(A_f) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z) = (1, -2) (2x - 3y + z)$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(1, -2)$$

$$\text{Ker}(f) = 2x - 3y + z = 0$$

$$(b) f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (-2x + 3y + z, x + y - 3z, x - 4y + 2z)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} - (1 \ -3) \\ - (1 \ -4 \ 2) \end{matrix}$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ -3) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -4 \ 2)}_{\text{décomposition minimale}}$$

$$\Rightarrow f(x, y, z) = (-1, 1, 0) (x + y - 3z) + (-1, 0, 1) (x - 4y + 2z)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

$$\ker(f) = \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ -1) \end{aligned}$$

$-c_2 - 2c_1$

$$f(x, y, z) = (-2, 1, 1) (x - 2z) + (3, 1, -4) (y - z)$$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}((-2, 1, 1), (3, 1, -4))$$

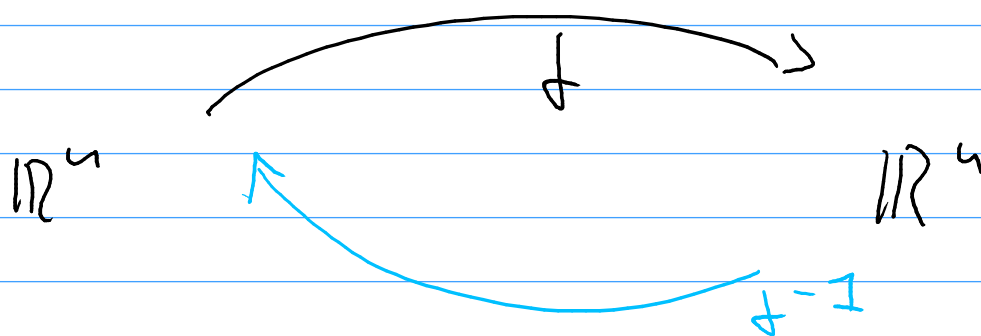
$$\ker(f) = \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

§ 3.6. Inversion

Def. Une application linéaire $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est invertible ssi $\exists f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

telle que

- $f \circ f^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$
- $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$



Pour $v, w \in \mathbb{R}^n$,

$$f(v) = w \iff f^{-1}(w) = v$$

f est inversible ssi $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$

On a alors par le thm du rang

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$



$$f^{-1}(v) \neq \frac{1}{f(v)}$$

Exemples:

(a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (2x - y, x + y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \det(A_f) = 2 - (-1) = 3 \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rg}(A_f) = 2, \ker(f) = \{0\}$$

$$A_f^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{3}, -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} \right)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x, y) = f^{-1}(\underbrace{2x-y}_{x'}, \underbrace{x+y}_{y'})$$

$$= \left(\frac{2x-y}{3} + \frac{x+y}{3}, -\frac{2x-y}{3} + \frac{2x+y}{3} \right) = (x, y) \checkmark$$

$$(b) (x, y) \mapsto (2x-y, x-\frac{1}{2}y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((2, 1))$$

$$\text{Ker}(f) : 2x - y = 0$$

$$= \text{vect}((1, 2))$$

$$\neq \{ (0, 0) \}$$

f n'est pas inversible, et

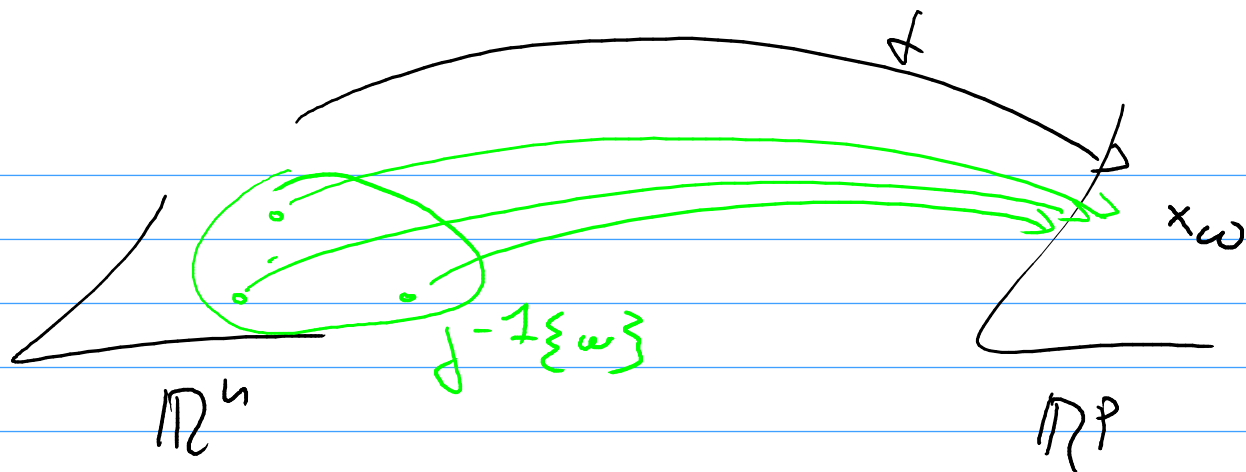
$$(1, 2), (1, 0), (0, 1) \notin \text{Im}(f)$$

ces vecteurs n'ont pas d'antécédants.

§ 3.7. Ensemble des antécédants

Def: Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire et $w \in \mathbb{R}^p$. L'ensemble des antécédants de w (la pré-image de w) est

$$f^{-1}\{w\} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = w\}$$



Case particulars: $\ker(f) = f^{-1}\{0_{\mathbb{R}^p}\}$

Prop: On a

$f^{-1}\{\omega\}$ $\begin{cases} \emptyset & \text{si } \omega \notin \text{Im}(f) \\ v_0 + \ker(f) & \text{si } \omega \in \text{Im}(f) \\ \text{avec } f(v_0) = \omega \end{cases}$

preuve:

• si $\omega \notin \text{Im}(f)$, alors $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $f(v) \neq \omega$. Donc,
 $f^{-1}(\omega) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = \omega\} = \emptyset$

• si $\omega \in \text{Im}(f)$. Alors $\exists v_0 \in \mathbb{R}^n$ t.q.
 $f(v_0) = \omega$.

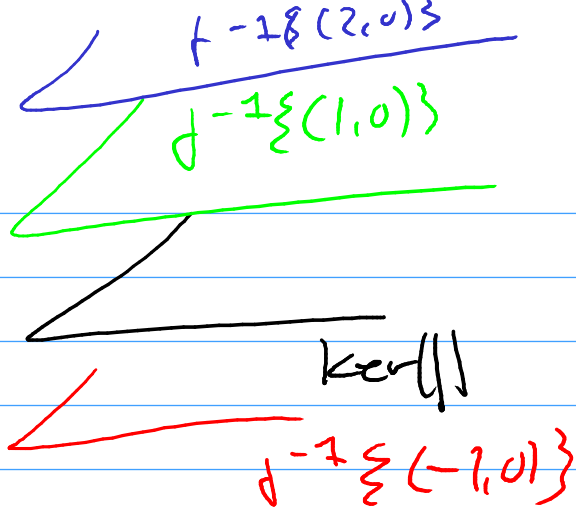
$\forall v \in \mathbb{R}^n$ t.q. $f(v) = \omega$

$$\Leftrightarrow f(v) - f(v_0) = \omega - \omega = 0$$

$$\Leftrightarrow f(v - v_0) = 0 \Leftrightarrow v - v_0 \in \ker(f)$$

$$\Leftrightarrow v \in v_0 + \ker(f)$$

□



Exemples: (a) Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est
 inversible, alors $f^{-1}\{w\} = \{f^{-1}(w)\}$
pr-image ↑
fonction réciproque

$$(b) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x - y, -2x + 2y)$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((1, -2))$$

$$\text{Ker}(f): x - y = 0 = \text{vect}((1, 1))$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} (x - y)$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((1, -2))$$

$$\text{eq. equation: } 2x + y = 0 = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & y \end{vmatrix}$$

$$\text{Ker}(f): x - y = 0$$

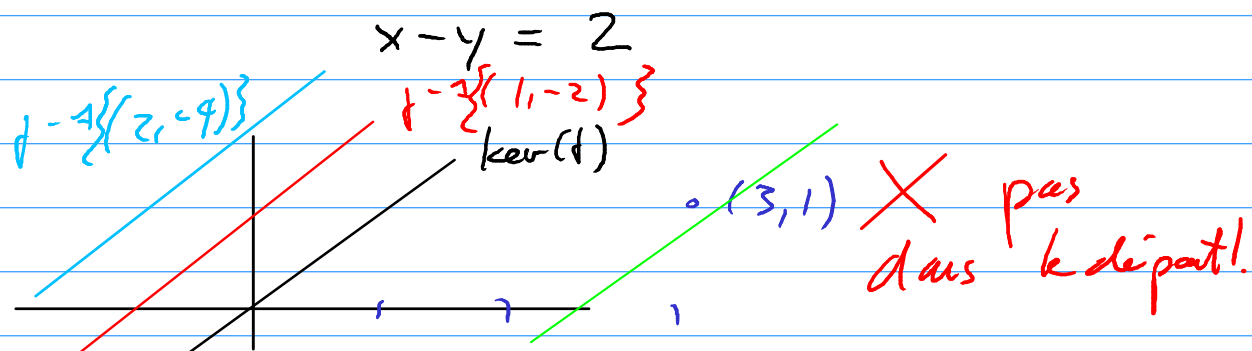
$$= \text{vect}((1, 1))$$

$$f^{-1}\{(0,0)\} = \text{vect}(1,1) \quad x-y=0$$

$$f^{-1}\{(1,-2)\} = \{(2,1)\} + \ker(f)$$

en équation : $x-y=1$ ($\parallel x-y=0$)

$$f^{-1}\{(2,-4)\} = \{(4,2)\} + \ker(f)$$



$$f^{-1}\{(3,1)\} = \emptyset$$

c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (2x+y-3z, 0, 4x+2y-6z)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{Im}(f) = \text{vect}(1, 0, 2)$ $y=0$ et $2x-z=0$

$\ker(f): 2x+y-3z=0$

$$f^{-1}\{(1,0,2)\} = \{(0,1,0)\} + \ker(f)$$

en équation : $2x+y-3z=1$

$$f^{-1}\{(0,1,0)\} = \emptyset$$

§38. Determinant

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et A_f sa matrice associée. Soient $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{O}(f(v_1), f(v_2)) = \det A_f \mathcal{O}(v_1, v_2)$$

preuve: Notons

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad [v_1]_{B.\text{can}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \quad [v_2]_{B.\text{can}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$A_f \cdot P = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 & \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \gamma x_1 + \delta y_1 & \gamma x_2 + \delta y_2 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{[f(v_1)]_{B.\text{can}}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{[f(v_2)]_{B.\text{can}}}$

$$\mathcal{O}(f(v_1), f(v_2)) \underset{\text{§ 2.8}}{=} \det(A_f P) \mathcal{O}(\underbrace{e_1, e_2}_{\text{base canonique}})$$

$$= \det(A_f) \det(P) \underset{\text{§ 2.8. } \mathcal{O}(v_1, v_2)}{=} \mathcal{O}(v_1, v_2)$$

$$= \det(A_f) \mathcal{O}(v_1, v_2) \quad \square$$

§ 3.3. Structure vectorielle

Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec leur matrices associées $A_f, A_g \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$.

Fixons $n=p=2$:

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\lambda f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) = v \mapsto \lambda f(v) = (\lambda \alpha_{1,1}x + \lambda \alpha_{1,2}y, \lambda \alpha_{2,1}x + \lambda \alpha_{2,2}y) \\ = \lambda (\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y, \alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y)$$

$$A_{\lambda f} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_{1,1} & \lambda \alpha_{1,2} \\ \lambda \alpha_{2,1} & \lambda \alpha_{2,2} \end{pmatrix} = \lambda A_f$$

On peut aussi additionner f avec g :

$$f + g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) = v \mapsto (f + g)(v) = f(v) + g(v)$$

$$= ((\alpha_{1,1} + \beta_{1,1})x + (\alpha_{1,2} + \beta_{1,2})y, (\alpha_{2,1} + \beta_{2,1})x + (\alpha_{2,2} + \beta_{2,2})y)$$

$$A_{f+g} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \beta_{1,1} & \alpha_{1,2} + \beta_{1,2} \\ \alpha_{2,1} + \beta_{2,1} & \alpha_{2,2} + \beta_{2,2} \end{pmatrix} = A_f + A_g$$

Proposition: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{rg}(\lambda f) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{rg}(f) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

preuve: $\text{Im}(\lambda f) = \{ \lambda f(v) \mid v \in \mathbb{R}^n \} = \begin{cases} \{0_{\mathbb{R}^p}\} & \text{si } \lambda = 0 \\ \text{Im}(f) & \text{si } \lambda \neq 0 \end{cases}$

□

Proposition: Soient $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

preuve: Notons $r = \text{rg}(f)$, $s = \text{rg}(g)$, alors

$$\left. \begin{array}{l} A_f = C_1 L_1 + \dots + C_r L_r \\ A_g = C'_1 L'_1 + \dots + C'_s L'_s \end{array} \right\} \Rightarrow A_{f+g} = A_f + A_g = \underbrace{C_1 L_1 + \dots + C_r L_r + C'_1 L'_1 + \dots + C'_s L'_s}_{r+s \text{ termes}}$$

La décomposition minimale de A_{f+g} en colonnes-lignes a donc au plus $r+s$ termes □

⚠ Pas de formule simple pour $\text{rg}(f+g)$ en terme de $\text{rg}(f)$ et de $\text{rg}(g)$.

Proposition:

$$\det(\lambda f) (= \det(A_{\lambda f})) \\ = \lambda^{\textcircled{n}} \det(f), \quad \text{si} \\ f: \mathbb{R}^{\textcircled{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\textcircled{n}}$$

⚠ $\det(f+g) \neq \det(f) + \det(g)$

Exemple: (1) $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(f) = \underline{3}$

$$A_{3f} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 27 = 9 \cdot \underline{3} = 3^2 \cdot 3$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 2 \\ \det = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 1 \\ \det = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 1 \\ \det = 0 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 1 \\ \det = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 1 \\ \det = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 1 \\ \det = 0 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 2 \\ \det = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 2 \\ \det = 1 \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 0 \\ \det = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 2 \\ \det = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{rg} = 2 \\ \det = -1 \quad (= (-1)^2 (-1)) \end{array}$$

§ 3.10. Composition:

$$\text{Soient } f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \quad g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d.$$

On peut composer :

$$g \circ f(v) := g(f(v))$$

$$g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$$

$$A_f \in M_{p \times n}(\mathbb{R}), \quad A_g \in M_{d \times p}(\mathbb{R})$$

$$\text{On a } A_{g \circ f} = A_g \times A_f$$

Fixons $n=p=d=2$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix}$$

$$g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) = v \mapsto g(f(v)) = g(\underbrace{\alpha_{1,1}x + \alpha_{1,2}y}_{x'}, \underbrace{\alpha_{2,1}x + \alpha_{2,2}y}_{y'})$$

$$= (\beta_{1,1}x' + \beta_{1,2}y', \beta_{2,1}x' + \beta_{2,2}y')$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{1,1}\alpha_{1,1}x + \beta_{1,1}\alpha_{1,2}y + \beta_{1,2}\alpha_{2,1}x + \beta_{1,2}\alpha_{2,2}y \\ \beta_{2,1}\alpha_{1,1}x + \beta_{2,1}\alpha_{1,2}y + \beta_{2,2}\alpha_{2,1}x + \beta_{2,2}\alpha_{2,2}y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\beta_{1,1}\alpha_{1,1} + \beta_{1,2}\alpha_{2,1})x + (\beta_{1,1}\alpha_{1,2} + \beta_{1,2}\alpha_{2,2})y \\ (\beta_{2,1}\alpha_{1,1} + \beta_{2,2}\alpha_{2,1})x + (\beta_{2,1}\alpha_{1,2} + \beta_{2,2}\alpha_{2,2})y \end{pmatrix}$$

$$\text{Mais } A_g A_f = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{pmatrix}$$

Donc, $A_{g \circ f} = A_g \times A_f$

Proposition: Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$
alors $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$

preuve: $B = C_1 L_1 + \dots + C_r L_r$, $r = \text{rg}(B)$

Mais $B \times A = C_1 \underbrace{(L_1 A)}_{L_1'} + \dots + C_r \underbrace{(L_r A)}_{L_r'}$

Donc, $B \times A$ a au plus r termes dans sa décomposition minimale.

$\Rightarrow \text{rg}(B \times A) \leq \text{rg}(B)$

□.

Que dire si A^{-1} existe?

On a $\text{rg}(BA) \leq \text{rg}(B)$

$= \text{rg}(\underbrace{BA}_{B'} A^{-1}) \leq \text{rg}(BA)$

Donc, $\text{rg}(BA) = \text{rg}(B)$ (si A^{-1} existe)

Proposition: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$,
 $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$

preuve: Then du ray nous doit que
 $\text{rg}(g \circ f) = n - \dim \ker(g \circ f)$

Mais, $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$
donc, $\dim \ker(f) \leq \dim \ker(g \circ f)$

$$\Rightarrow \text{rg}(g \circ f) = n - \dim \ker(g \circ f) \\ \leq n - \dim \ker(f) = \text{rg}(f) \quad \square$$

Proposition: Soient $g, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$$

preuve:

$$\det(g \circ f) = \det(A_{g \circ f}) \\ = \det(A_g \times A_f) = \det(A_g) \det(A_f) \\ = \det(g) \det(f) \quad \square.$$

Corollaires: Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\det(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n) = (\det(f))^n$$

Si $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existe, alors

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$$

4. Transformations géométriques dans $\mathbb{R}^3$

§4.1. Projections

Une application $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire ($n=2,3$) est appelée une projectionssi

$$f \circ f = f \quad (A_f^2 = A_f)$$

A_f est alors une matrice de projection

Exemples: $A = I_3$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition: Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une projection, alors $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$v = \underbrace{f(v)}_{\in \text{Im}(f)} + \underbrace{v - f(v)}_{\in \text{Ker}(f)}$$

preuve: $f(v) \in \text{Im}(f)$ est clair par déf.

$$\begin{aligned} f(v - f(v)) &= f(v) - f(f(v)) && (\text{par linéarité de } f) \\ &= f(v) - f(v) = 0 && (f \text{ proj.}) \end{aligned}$$

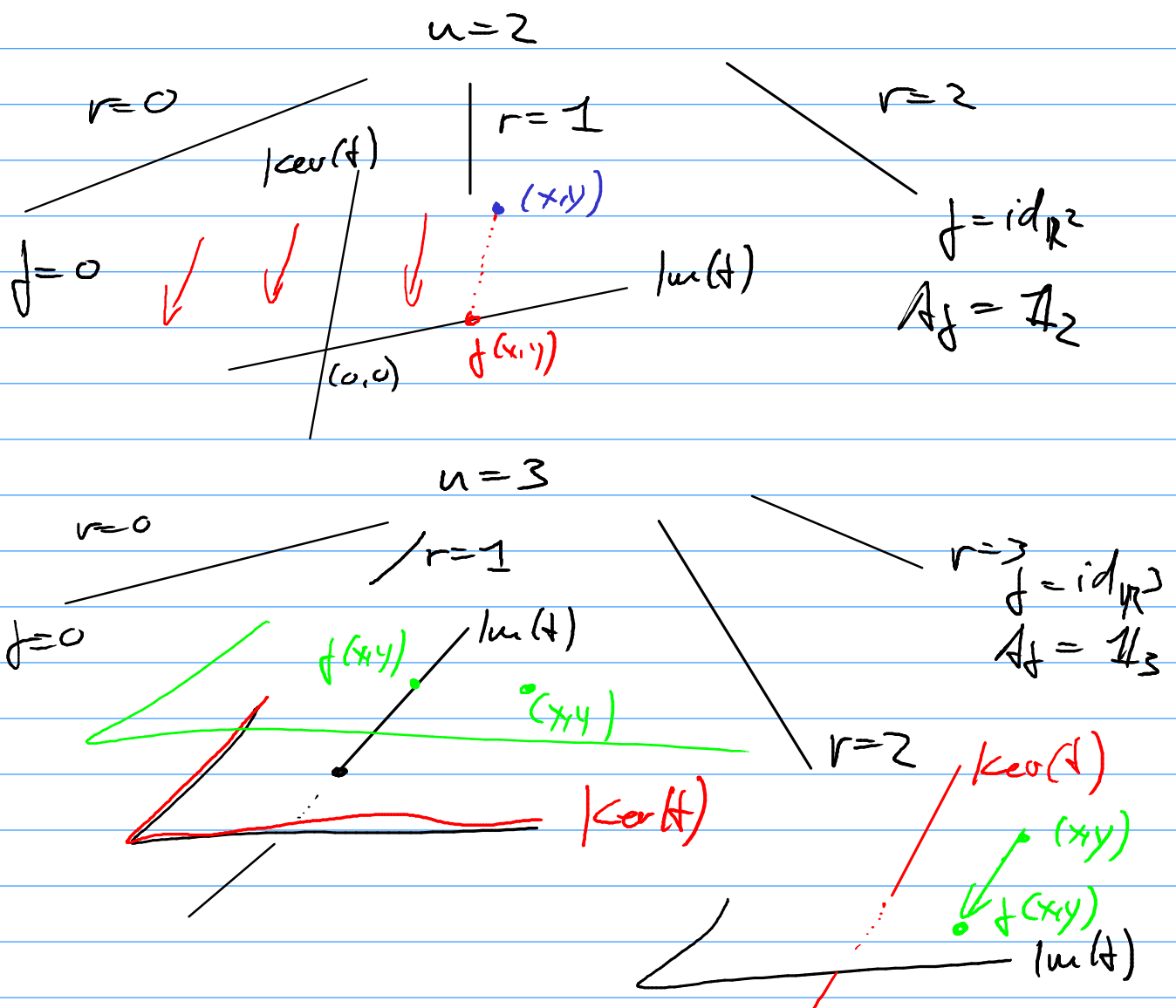
$$\Rightarrow v - f(v) \in \text{Ker}(f)$$

□

Remarque: • Si f est une projection, A_f est symétrique ssi f projette orthogonalement.

• Il existe des projections non-orthogonales.

Si $r = \text{rg}(f)$, f une projection, on distingue les cas suivants:



Résumé: • Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une projection, alors géométriquement, f projette $\mathbb{R}^n$ sur $\text{Im}(f)$, parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

- $\text{id}_{\mathbb{R}^n} - f$ est une projection sur $\ker(f)$ ($= \text{Im}(\text{id} - f)$), parallèlement à $\text{Im}(f)$ ($= \ker(\text{id} - f)$).

Exemples: (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{7} (6x + 2y, 3x + y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{7}$$

$$A_f^2 = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 42 & 14 \\ 21 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_f = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (3 \ 1)$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(2, 1)$$

$$\ker(f): 3x + y = 0 \\ = \text{vect}(1, -3)$$

(b)

$$g = \text{id}_{\mathbb{R}^2} - f$$

$$A_g = \text{Id}_2 - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_g = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (1 \ -2)$$

$$\text{Im}(g) = \text{vect}(1, -3) \\ = \ker(f)$$

$$\ker(g): x - 2y = 0$$

$$\text{vect}(2, 1) = \text{Im}(f)$$

(c) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (y + z, x - z, -x + y + 2z)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_f^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A_f$$

$$g := \text{id}_{\mathbb{R}^3} - f, \quad A_g = \mathbb{I}_3 - A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ -1)$$

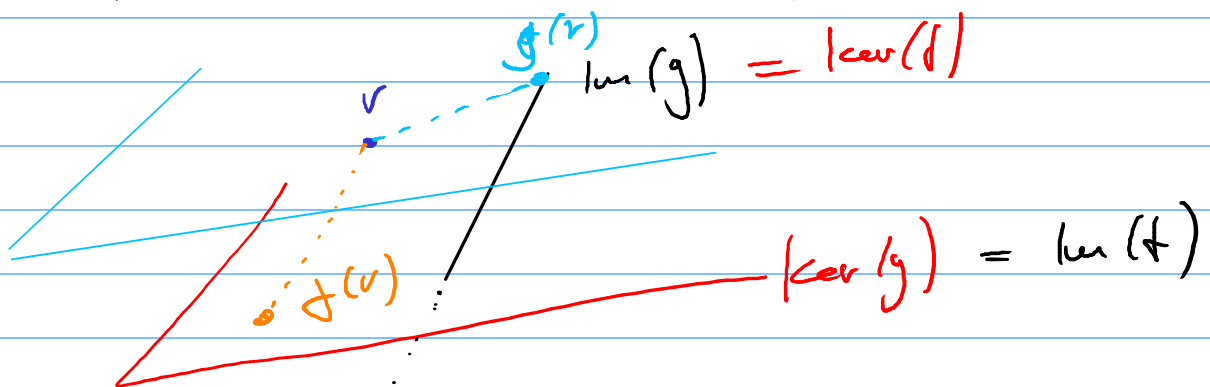
$$\Rightarrow \text{Im}(g) = \text{vect}(1, -1, 1)$$

$$\text{Ker}(g) = \{x - y - z = 0\}$$

$$= \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, -1))$$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, -1))$$

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}(1, -1, 1)$$



§9.2. Applications de rang 1

Soit $f: \mathbb{R}^u \rightarrow \mathbb{R}^u$ linéaire ($u=2,3$)
 La trace de f est donnée par

$$\text{Tr}(f) := \text{Tr}(A_f) = \text{somme des éléments diagonaux}$$

Exemple: $A_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\text{Tr}(f) = \alpha + \delta$

Proposition: Si f est de rang 1 alors
 $f \circ f = \text{Tr}(f) f$

preuve: Fixons $n=2$. Comme $\text{rg}(f) = 1$,

$$A_f = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \end{pmatrix} (p \ q),$$

$$\text{Tr}(A_f) = \alpha + \delta = \mu p + \xi q = (p \ q) \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_f^2 &= \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \end{pmatrix} (p \ q) \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \end{pmatrix} (p \ q) = \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \end{pmatrix} \text{Tr}(A_f) (p \ q) \\ &= \text{Tr}(A_f) \begin{pmatrix} \mu \\ \xi \end{pmatrix} (p \ q) = \text{Tr}(A_f) A_f \quad \square. \end{aligned}$$

Cas particuliers: ($\text{rg}(f) = 1$, $\lambda = \text{tr}(f)$)

• si $\lambda = \text{tr}(f) = 1$, f est une projection.

• si $\lambda = \text{tr}(f) = 0$, $f \circ f = 0$ ($\Leftrightarrow A_f^2 = 0$)

f est nilpotent ($\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$)

• si $\lambda = \text{tr}(f) \neq 0, 1$, alors $\frac{1}{\lambda} f$ est une projection.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \frac{1}{\lambda} f \circ \frac{1}{\lambda} f &= \frac{1}{\lambda^2} f \circ f = \frac{1}{\lambda^2} f \\ &= \frac{1}{\lambda} f. \end{aligned}$$

Examples: (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (x+2y, x+2y)$$

$$\ln(f) = \text{vect}(1,1) \quad , \quad \text{rg}(f) = 1,$$

$$\ker(f): x + 2y = 0,$$

$$= \text{vect}(2, -1)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(f) = 3$$

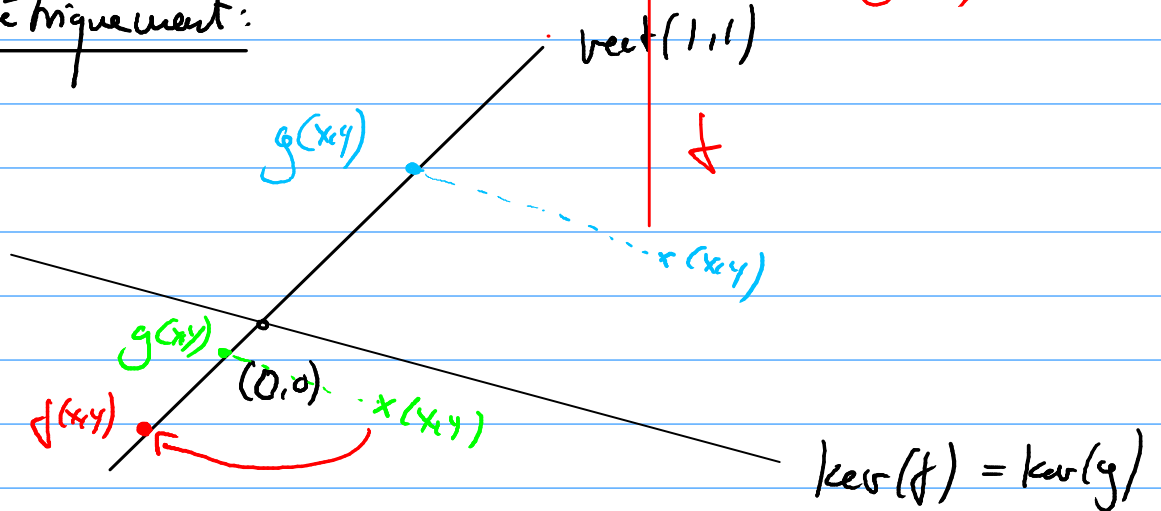
$$A_g = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_g^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_g$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{3}(x+2y, x+2y) = \frac{1}{3}f(x, y)$$

$$f(x,y) = 3g(x,y)$$

géométriquement:



$$(b) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3:$$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y + 5z, 0, 4x - 4y + 20z)$$

$$\text{Im}(f) = \text{vect}(1, 0, 4)$$

$$\text{rg}(f) = 1$$

$$\text{Ker}(f): x - y + 5z = 0$$

$$\dim \text{Ker}(f) = 2$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$$

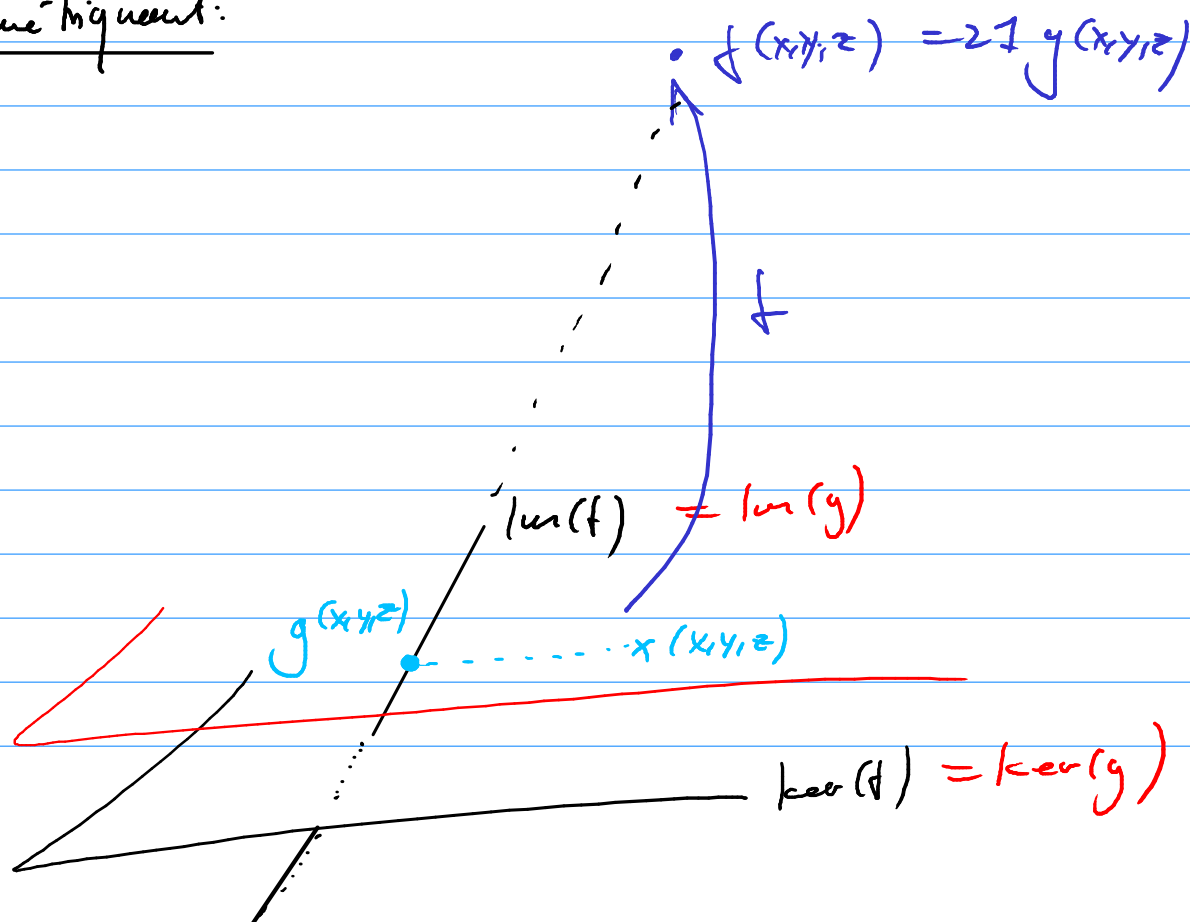
$$\text{tr}(f) = 21$$

$$A_g = \frac{1}{21} A_f = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A_g^2 = \frac{1}{441} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -21 & 105 \\ 0 & 0 & 0 \\ 84 & -84 & 420 \end{pmatrix} \frac{1}{441}$$

$$= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 20 \end{pmatrix} = A_g$$

géométriquement:



§3.3. Symétries

Def: Une symétrie est une application linéaire $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ s.g.
 $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \quad (\Leftrightarrow A_f^2 = I_n)$

Proposition: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors
 f symétrique $\Leftrightarrow g := \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f)$ est
une projection

preuve: g est une projection

$$\Leftrightarrow g \circ g = g$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f) \circ \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f) = \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f + f + f \circ f) = \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f)$$

$$\Leftrightarrow \text{id}_{\mathbb{R}^n} + 2f + f \circ f = 2\text{id}_{\mathbb{R}^n} + 2f$$

$$\Leftrightarrow f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow f \text{ est une symétrie } \square.$$

A chaque symétrie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
on associe une
projection
 $g: \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathbb{R}^n} + f)$

$$n=2 \quad (\mathbb{R}^2)$$

$$\text{rg}(g)=0$$

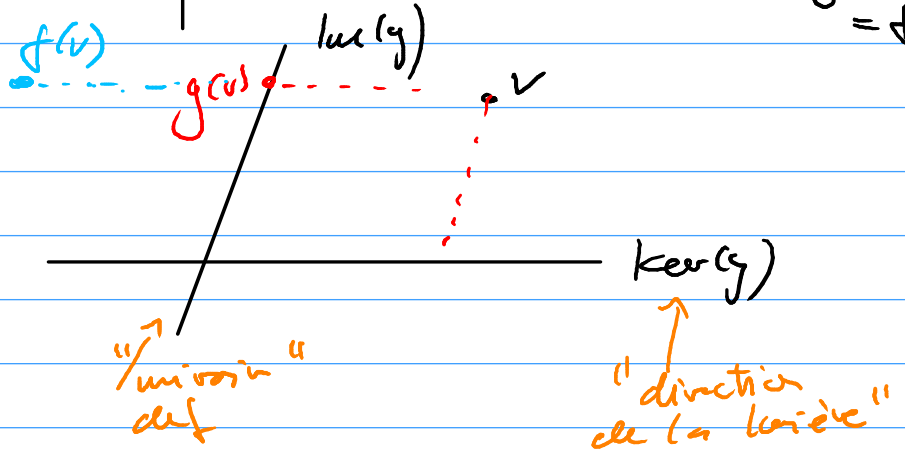
$f = -\text{id}_{\mathbb{R}^2}$
(c.o.) pt. fixe
 f est un
univoir p. v.p.
à (o,o)

$$\text{rg}(g)=1$$

$$\text{Im}(g) = \text{ker}(\text{id}_{\mathbb{R}^2} - f)$$

$$\text{rg}(g)=2$$

$$g = \text{id}_{\mathbb{R}^2} = f$$



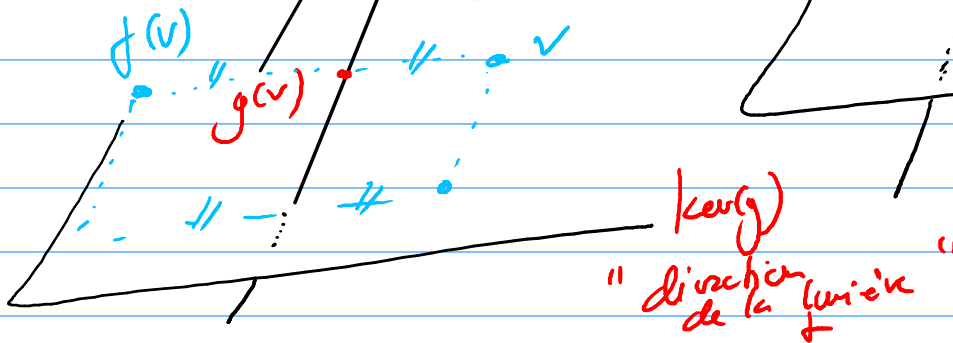
$$n=3$$

$$\text{rg}(g)=0$$

$f = -\text{id}_{\mathbb{R}^3}$
symétrie
axiale
p. v.p. à
(o,o)

$$\text{rg}(g)=1$$

$$\text{Im}(g) \text{ "univoir" de } f$$



$$\text{rg}(g)=2$$

$$\text{ker}(g) \text{ "direction de la linéaire"}$$

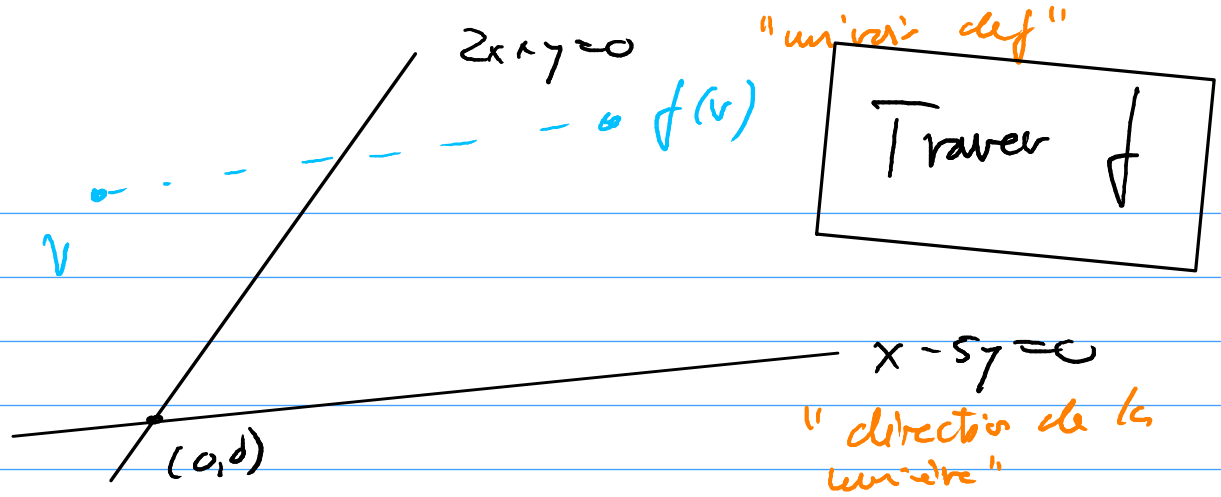
$$\text{Im}(g) \text{ "univoir de } f$$

$$\text{rg}(g)=3 \Rightarrow g = \text{id}_{\mathbb{R}^3} = f$$

Exemples:

Sont les droites

$$2x + y = 0 \quad \text{et} \quad x - 5y = 0$$



On commence par tracer g :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(-1, 2) \quad , \quad \text{Ker}(g): x-5y=0$$

$$A_g = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ -5) = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Puisque $g = \frac{1}{2}(\text{id}_{\mathbb{R}^2} + f)$

on a $f = 2g - \text{id}_{\mathbb{R}^2}$

$$\Rightarrow A_f = \frac{2}{11} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -9 & -10 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{11}(-9x - 10y, -4x + 9y)$$

Testons avec $v = (5, 1) \in x-5y=0$

$$f(5,1) = \frac{1}{11}(-55, -11) = -(5, 1) \quad \checkmark$$

$$(b) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{5} (4x - 2y - 7z, -x + 3y - 7z, -x - 2y - 2z)$$

$$A_f = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_f^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3$$

$$A_g = \frac{1}{2} (\mathbb{I}_3 + A_f) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 \\ -1 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & -2 & -7 \\ -1 & 8 & -7 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A_g) = 2$$

"mirroir" = $\ker(g)$
direction = $\ker(g)$ "

Astuce: on étudie $h = \text{id}_{\mathbb{R}^3} - g$

"mirroir" = $\ker(h)$
direction = $\text{im}(h)$ "

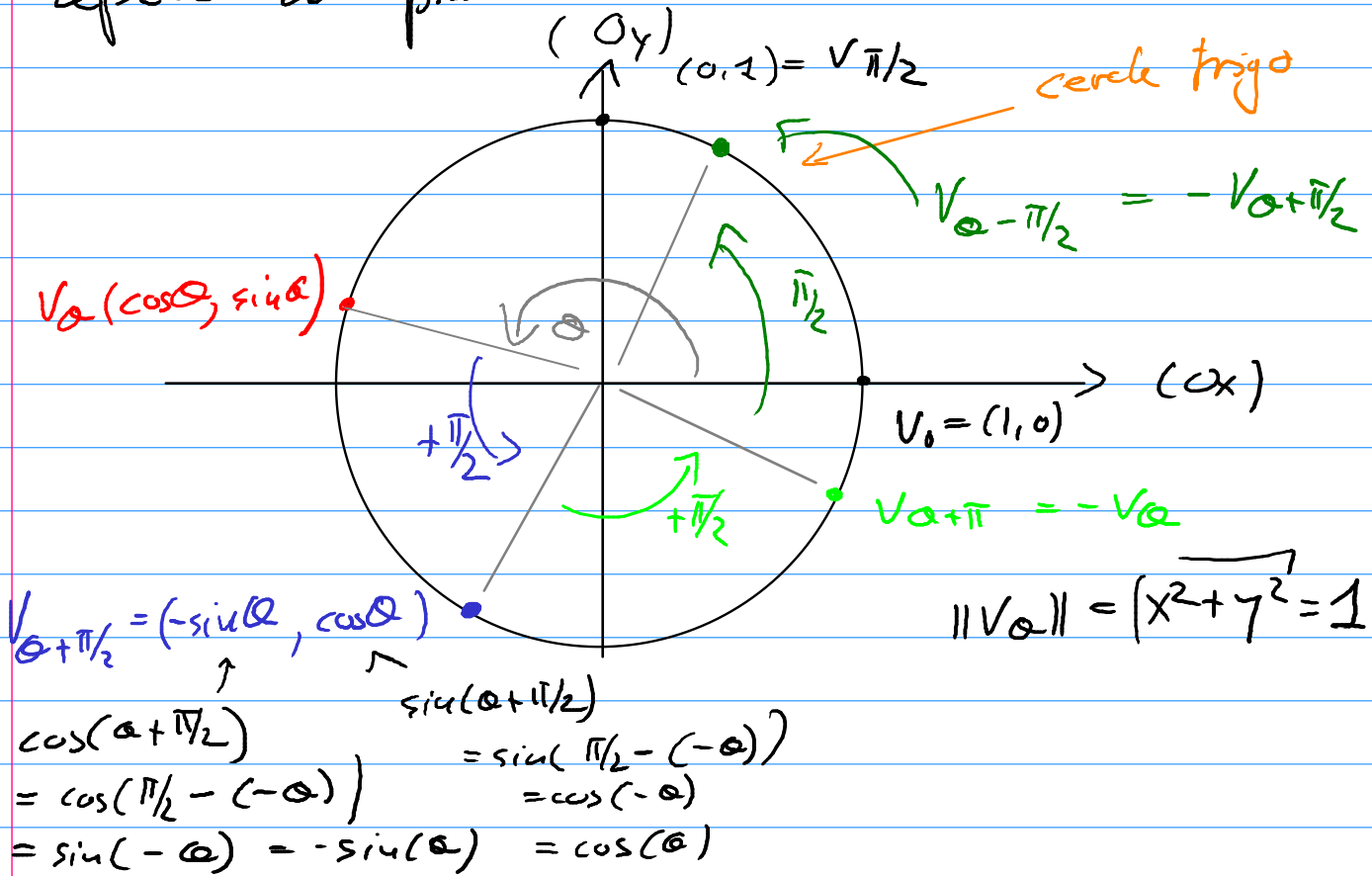
$$A_h = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 7)$$

Donc, miroir: $x + 2y + 7z = 0$

direction par: $\text{vect}(1, 1, 1)$

§ 3.4. VISUALISATION ORTHONORMÉE

Dans ce § on va visualiser $\mathbb{R}^2$ par un repère du plan orthogonale et oriené.

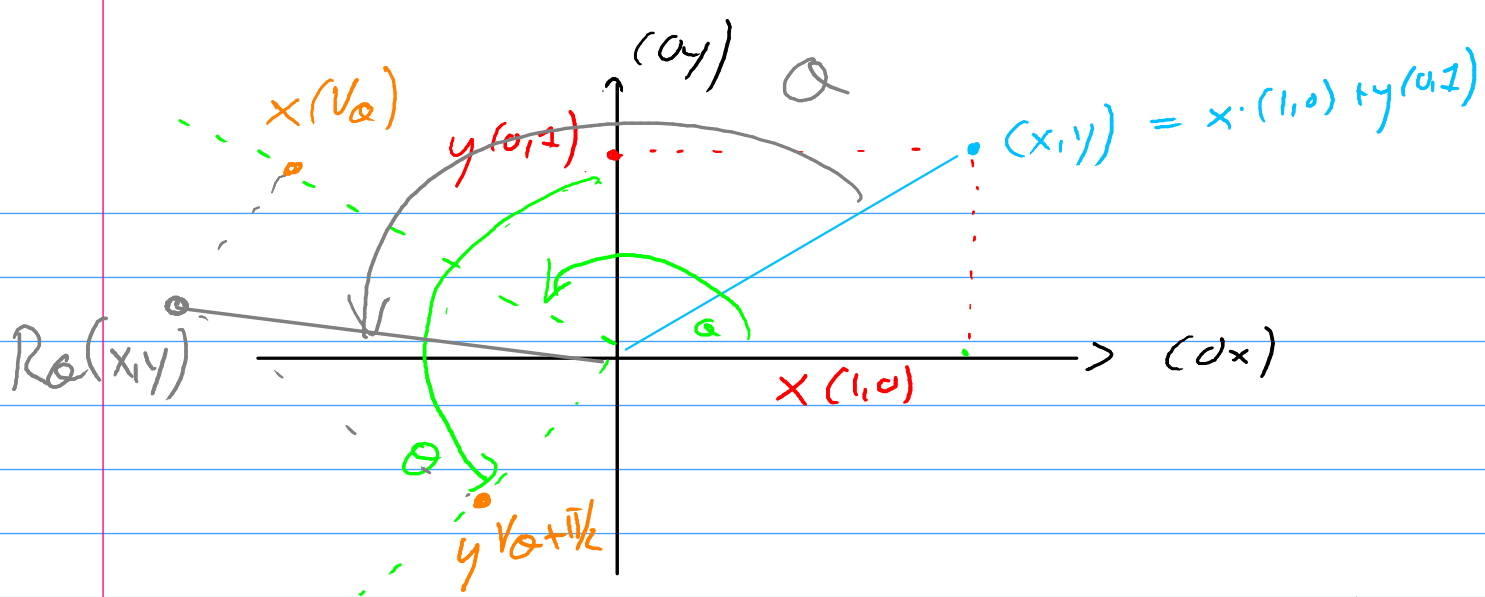


§3.5. Rotations.

Definition: On dit qu'une application linéaire $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une rotation ssi

$\exists \theta \in \mathbb{R}$ s.t. $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Visualisations d:



$$\begin{aligned}
 R_\theta(x, y) &= (\cos \theta x - \sin \theta y, \sin \theta x + \cos \theta y) \\
 &= x(\cos \theta, \sin \theta) + y(-\sin \theta, \cos \theta) \\
 &= x V_\theta + y V_{\theta + \pi/2} \\
 &= x R_\theta(1, 0) + y R_\theta(0, 1)
 \end{aligned}$$

Examples: (a) $R_\theta R_\alpha = R_{\theta + \alpha}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) & -\sin(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \\ \sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \end{cases}$$

$$(b) \quad \theta = 0 \quad R_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \theta = \pi/2 \quad R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(R_{\pi/2})^2 = R_{\pi/2} \cdot R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

$$\Rightarrow i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} !$$

$$\Rightarrow z = x + iy = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = x - iy = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = z^t$$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = (\det z)^{1/2}$$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = z^t \cdot \frac{1}{\det z}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(d) \quad A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

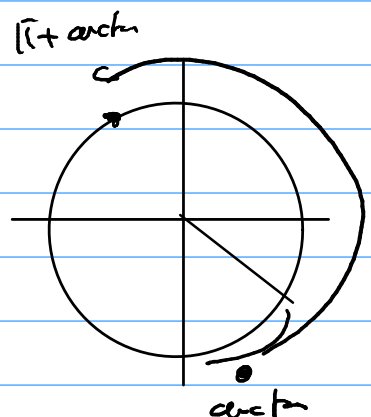
$$\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{-4}{5} \right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \exists \theta \text{ t.p. } \begin{cases} \cos \theta = \frac{3}{5} \\ \sin \theta = \frac{-4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + k\pi$$

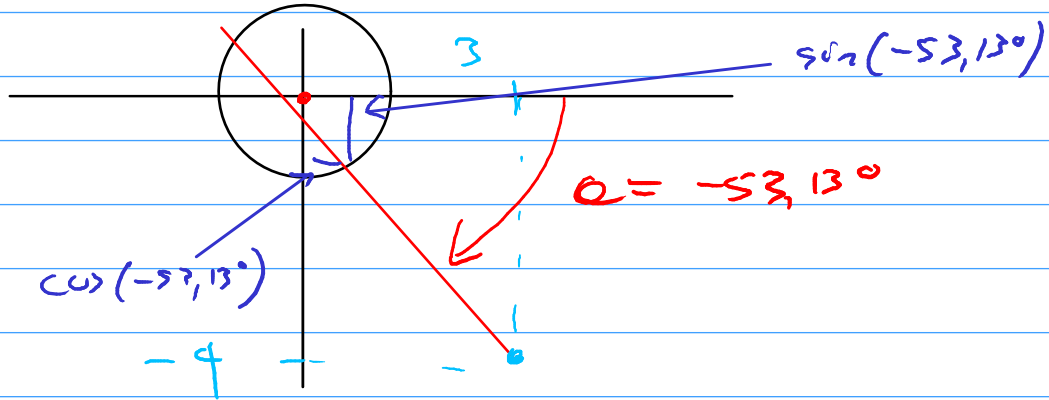
$$\in \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] + k\pi$$



$$\text{étude des signes} \Rightarrow \theta = \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 2k\pi$$

on peut choisir $\theta = \arctan(-4/3) = -53,13^\circ$

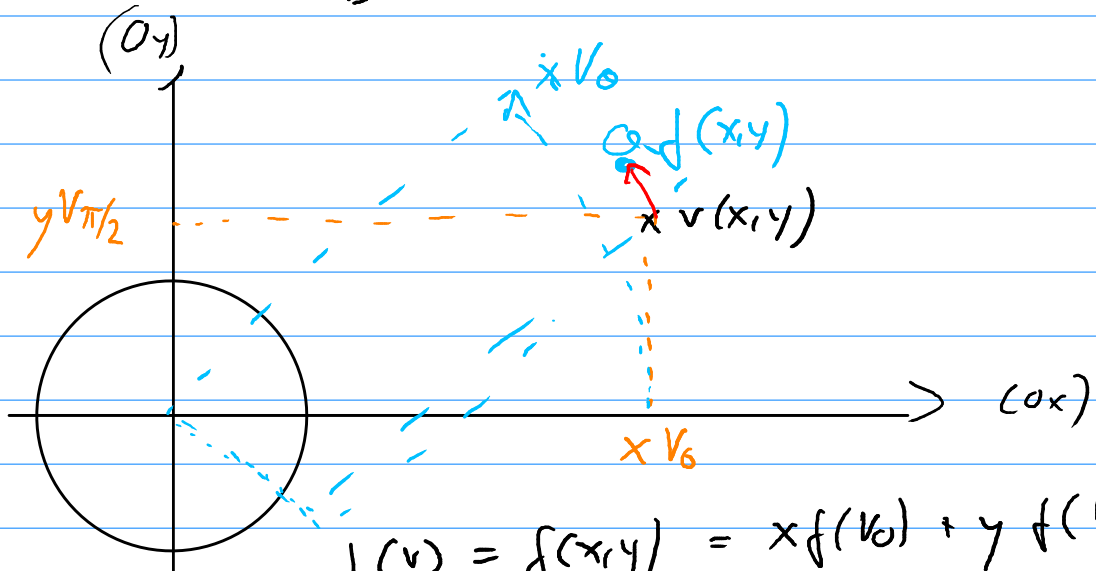
Das, $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = R_{-53,13^\circ}$



§ 3.6. Reflexions:

Def: On dit que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une réflexion si $\exists \theta \in \mathbb{R}$

$$A_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$[V_0]_{B.co}$$
$$\cup [V_G - \pi/2]_{B.c.c}$$


$$f(v) = f(x, y) = x f(v_0) + y f(v_k) \\ = \underline{x v_0} + y v_{0-\pi/2}$$

matriciellement: $\frac{1}{2} (A_\theta + I_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta + 1 & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta + 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos \theta + 1}{2} & \frac{\sin \theta}{2} \\ \frac{\sin \theta}{2} & \frac{1 - \cos \theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta/2) & \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) & \sin^2(\theta/2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

"ker(g) = direction de la lumière"

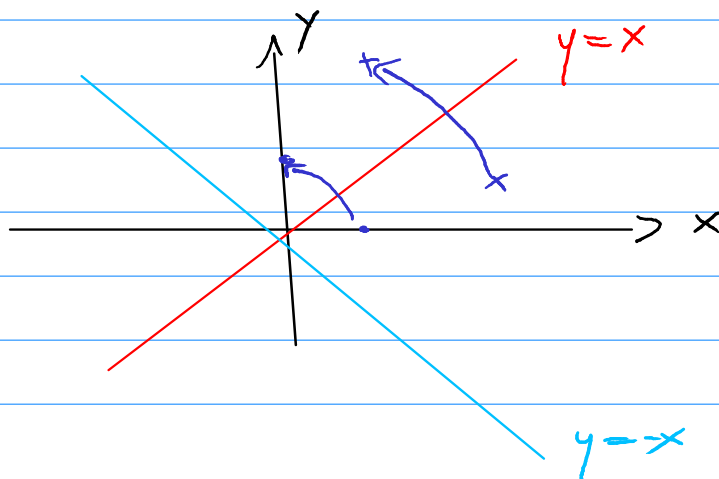
"Im(g) = miroir"

$$\Rightarrow \text{miroir} = \theta/2$$

lumière: $\cos(\theta/2)x + \sin(\theta/2)y = 0$
 $= \text{vect}(-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$

⚠ angle du miroir = $\theta/2 \neq \theta$
 angle des

Exemple: (a) Reflexion par à l'axe $y=x$
 avec $y=-x$ comme direction.



$$f(x, y) = (y, x)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & \sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & -\cos \pi/2 \end{pmatrix}$$

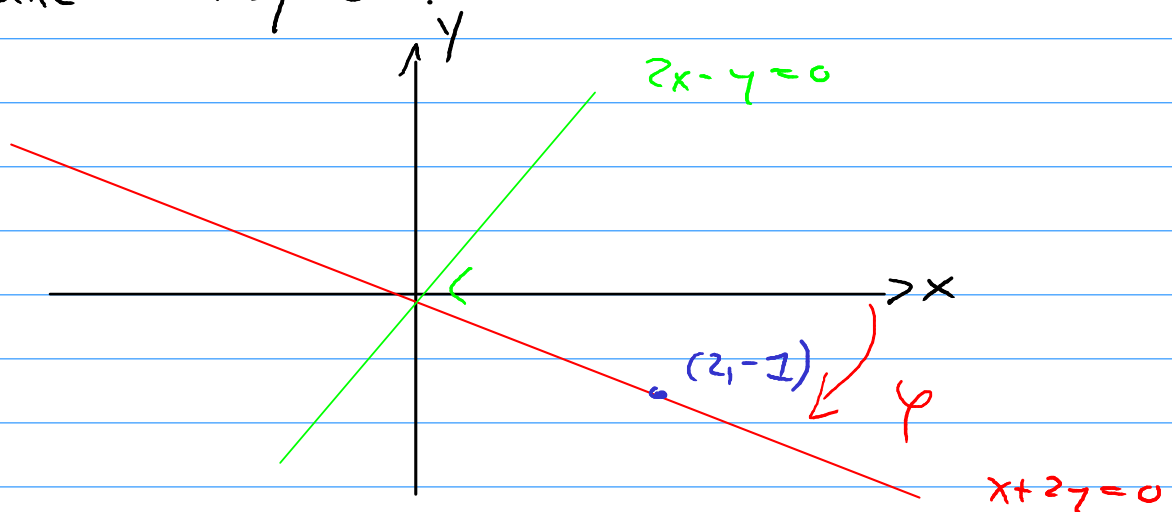
Projecteur associé : $\begin{pmatrix} \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & \sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \pi/4 & \cos \pi/4 \sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 \cos \pi/4 & \sin^2 \pi/4 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vecteur : $\text{vect}(1,1)$

direction lumière : $\cos \pi/4 x + \sin \pi/4 y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$
 $\Leftrightarrow y = -x$

(b) Déterminer $f(x,y)$ où f est la réflexion d'axe $x+2y=0$



Méthode 1: puisque $f(x,y)$ est une réflexion, elle s'écrit comme

$$f(\cos \theta x + \sin \theta y, \sin \theta x - \cos \theta y)$$

On sait que $f(2, -1) = (2, -1)$ (sur l'axe de symétrie)

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \theta \cdot 2 - \sin \theta = 2 \\ \sin \theta \cdot 2 + \cos \theta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cos \theta - 2 \sin \theta = 4 \\ 2 \sin \theta + \cos \theta = -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5 \cos \theta = 3 \\ 2 \sin \theta + \cos \theta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{3}{5} \\ \sin \theta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = -\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$f(x, y) = (3/5x - 4/5y, -4/5x - 3/5y)$$

Méthode 2: projection associée à f :

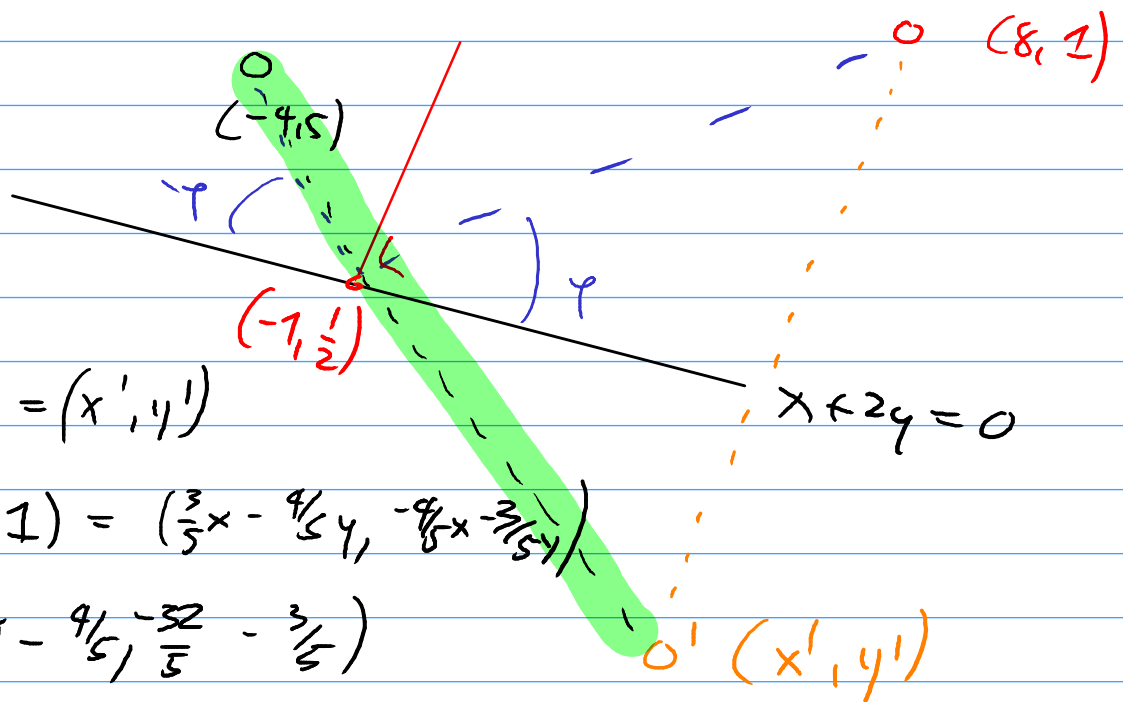
$$g: \frac{1}{2}(\text{id} + f) \Rightarrow A_g = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_g = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } f = 2g - \text{id}$$

$$A_f = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

§7. Application au billard:

Un joueur de billard veut frapper sa balle de quise trouée en $(-4, 5)$ pour atteindre une boule en $(8, 1)$ après un rebond sur $x + 2y = 0$:



$$J(x, y) = (x', y')$$

$$\Rightarrow J(8, 1) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y, -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y \right)$$

$$= \left(\frac{24}{5} - \frac{4}{5}, -\frac{32}{5} - \frac{3}{5} \right)$$

$$= (4, -7)$$

Description du segment $(-4, 5) - (4, -7)$

un point sur ce segment est décrit par

$$t(-4, 5) + (1-t)(4, -7)$$

$$t \in [0, 1]$$

$$= (4, -7) + t((-4, 5) - (4, -7))$$

$$= \text{" } O' + t \overrightarrow{O'O} \text{"}$$

Tracer & h.g le point est sur $x + 2y = 0$

$$\Leftrightarrow -4t + (1-t)4 + 2(5t + (1-t)(-7)) = 0$$

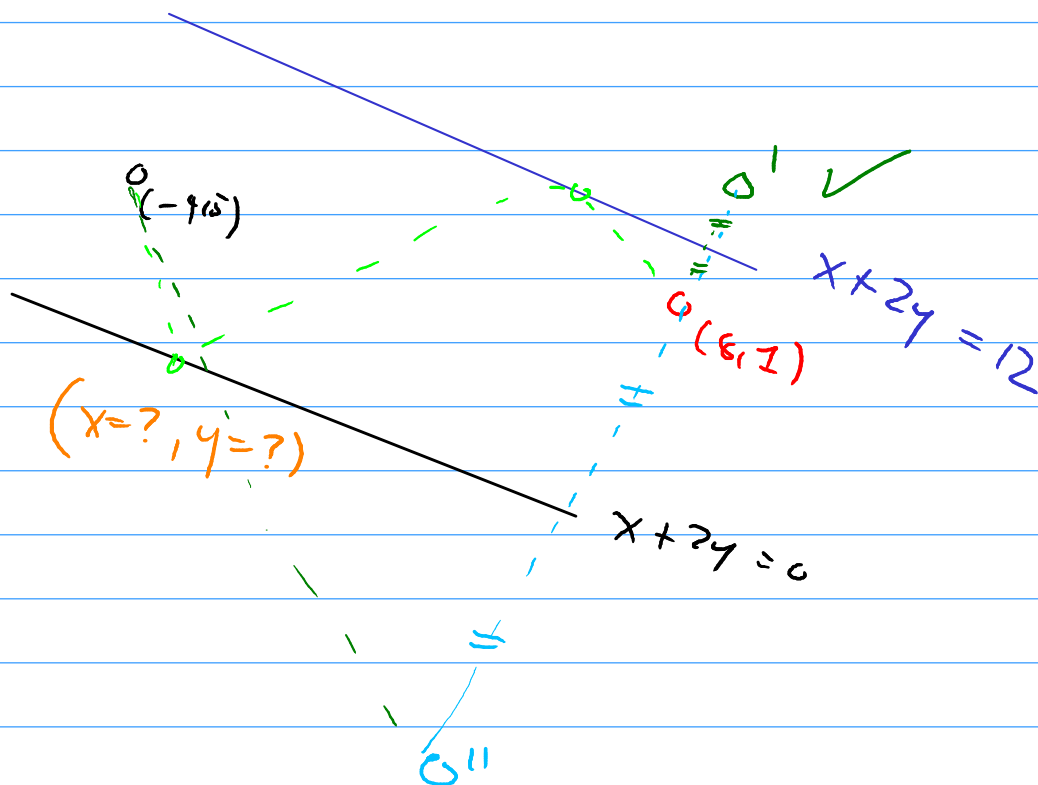
$$\Leftrightarrow -4t - 4t + 4 + 10t + 14t - 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

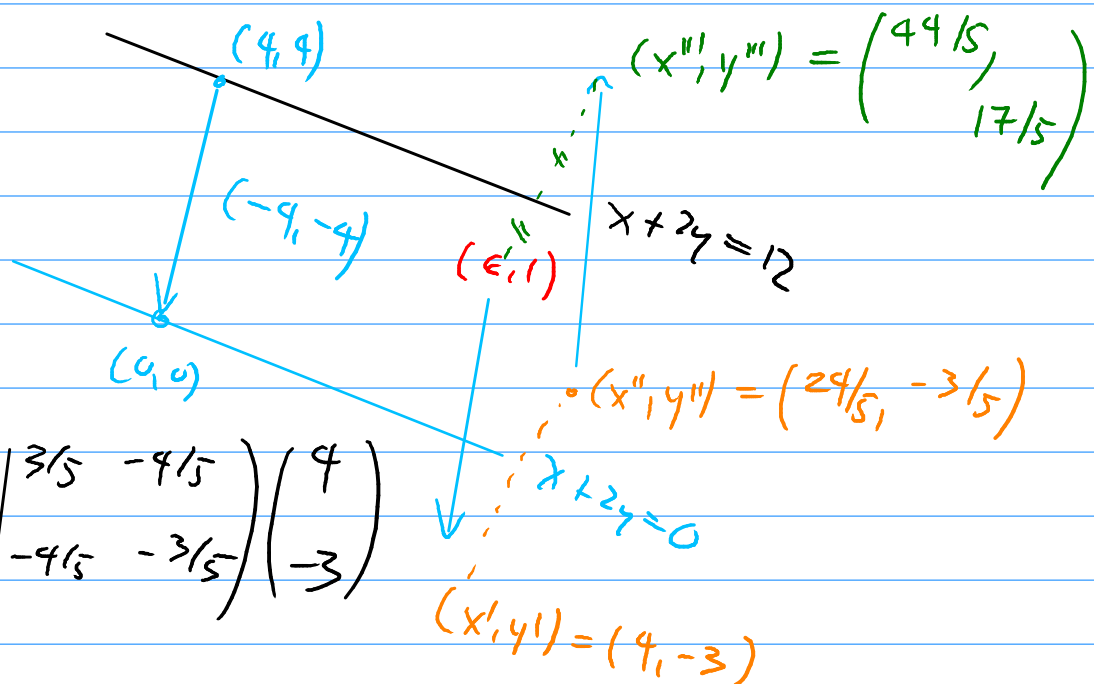
$$\Rightarrow (X, Y) = \frac{5}{8}(-9, 5) + \frac{3}{8}(4, -7)$$

$$= \left(\frac{-8}{8}, \frac{4}{8} \right) = \underline{\underline{\left(-1, \frac{1}{2} \right)}}$$

Billard à deux bandes:



1^{re} étape:



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

2^eme étape: calculer les coordonnées par O''

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44/5 \\ 17/5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 44 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 65 \\ -227 \end{pmatrix}$$

$$O'' \text{ vise } \frac{1}{25} (65, -227)$$

$$\text{à partir de } (-4, 5) = \frac{1}{25} (-100, 125)$$

segment:

$$t(65, -227) + (1-t)(-100, 125) \in x+2y=0$$

$$\Rightarrow 65t + 100(t-1) + -454t + (1-t)250 = 0$$

$$\Rightarrow -539t + 150 = 0 \Rightarrow t = \frac{150}{539}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(x, y)}} = \frac{6}{539} (65, -227) + \frac{389}{539} (-4, 5)$$

4. REPRESENTATIONS MATRICIELLES D'APPLICATIONS LINEAIRES

§ 4.1 MATRICES REPRESENTATIVE

RAPPEL: • Un vecteur dans $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = v$$

• En composantes:

$$[v]_{B.can} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

$$[v]_B = \left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right|$$

où $B = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$
et $B_{can} = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique.

• matrice de changement de base

$$(v_1, \dots, v_n) = (e_1, \dots, e_n) \underset{\text{c\`{h}ang. de base}}{\overline{P}}$$

• matrice de changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Q = P^{-1}$$

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire.

Soit $A_f \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$ sa matrice associée.

Soient $v_1, \dots, v_n$ une base de $\mathbb{R}^n$ (départ)
et $v'_1, \dots, v'_p$ une base de $\mathbb{R}^p$ (arrivée)

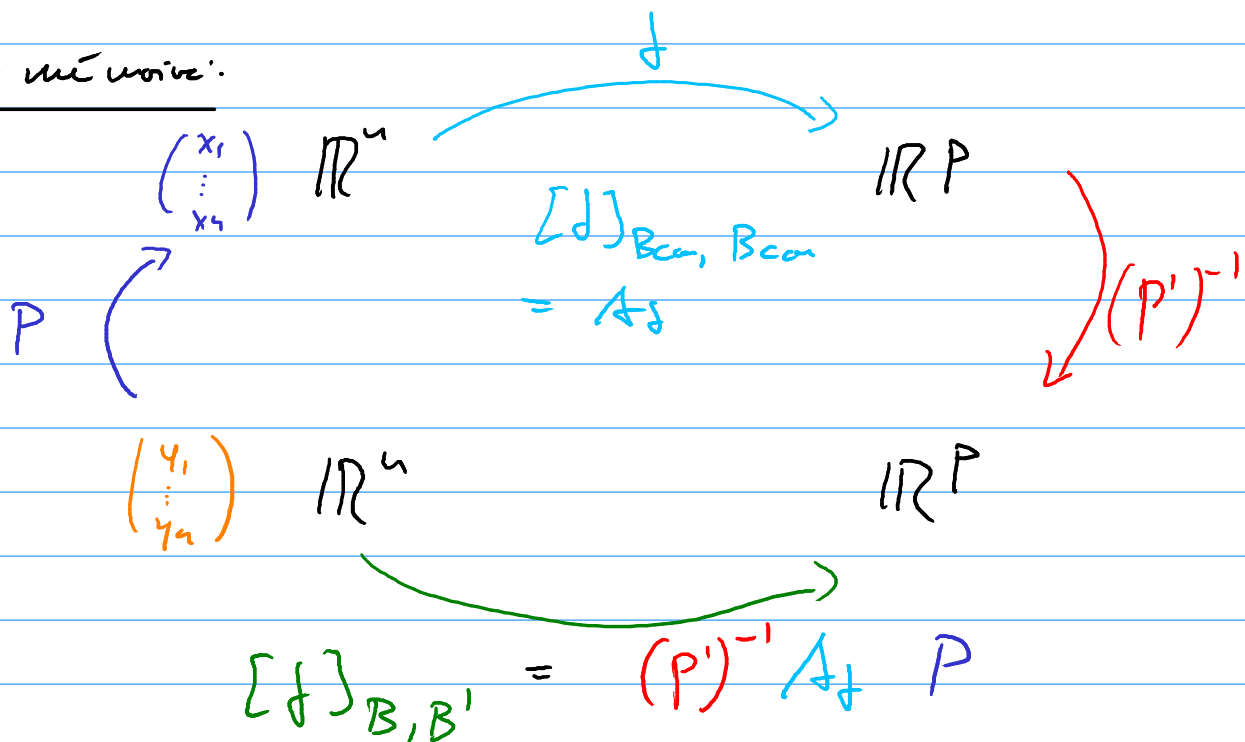
Soient P et P' les matrices de changement de
base de B_{can} à B dans $\mathbb{R}^n$ (P)
et de B_{can} à B' dans $\mathbb{R}^p$ (P')

Def: la matrice

$$[f]_{B, B'} = \underline{(P')^{-1} A_f P}$$

est appelée la matrice représentative de f
p.rap. à B et B'

Aide-mémoire:



Remarques: • Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et que $B=B'$
alors $[f]_{B,B'} = [f]_B$

• si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et $B=B_{can}$,
alors $[f]_{B,B'} = A_f$ $B'=B_{can}$

$$[f]_{B,B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p,1} & & \alpha_{p,n} \end{pmatrix} \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$$

Proposition: Si $v \in \mathbb{R}^n$, on a:

$$[f(v)]_{B'} = [f]_{B,B'} [v]_B$$

preuve:

$$\begin{aligned} [f(v)]_{B'} &= (P')^{-1} [f(v)]_{B_{can}} \\ &= (P')^{-1} A_f [v]_{B_{can}} \\ &= \underbrace{(P')^{-1} A_f P}_{[f]_{B,B'}} [v]_B \\ &= [f]_{B,B'} [v]_B \end{aligned}$$

□.

Proposition: On a

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} = [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per vector} \\ \text{de base de } B}}{d(v_1)}]_{B'} \dots \rightarrow \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix} = [\underset{\substack{\uparrow \\ \text{un seul vector} \\ \text{de base } B}}{d(v_n)}]_{B'}$$

preuve:

$$\begin{aligned} [d(v_1)]_{B'} &= [d]_{B,B'} [v_1]_B = [d]_{B,B'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{p,1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [d(v_k)]_{B'} &= [d]_{B,B'} [v_k]_B = [d]_{B,B'} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} k\text{e} \\ \text{line} \end{matrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{p,k} \end{pmatrix} \quad B. \end{aligned}$$

§ 4.2. Invariants

Proposition: $\text{rg} [d]_{B,B'} = \text{rg } A_d = \text{rg } (A)$

preuve:

$$\text{rg} [d]_{B,B'} = \text{rg} (P'^{-1} A_d P)$$

$$A_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$((3,4), (2,1)) = ((1,0), (0,1)) P$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(P') = -1$$

$$[f]_{B, B'} = (P')^{-1} A_{\downarrow} P$$

$$= - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -14 & -21 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Checks:

$$[f(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad [f(v_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $(3,4)$ $\uparrow$ $(2,1)$

$$f(3,4) = (2, -6) \Rightarrow [f(3,4)]_{B'} = [(2, -6)]_{B'}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{?}{=} 14(+1, 1) + 9(-3, 2)$$

$$= (14, -14) + (-27, 18) = (-13, 4) \checkmark$$

$$f(2,1) = (3, -9) \Rightarrow [f(2,1)]_{B'} = [(3, -9)]_{B'}$$

$$= \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{?}{=} 21(+1, 1) + 6(-3, 2)$$

$$= (21, -21) + (-18, 12) = (3, -9) \checkmark$$

$$(c) \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

$$A_f = I_n$$

P matrice de changement de base de B_{can} à B

P' matrice de changement de base de B_{can} à B'

$$\bullet \quad [d]_{B, B'} = P'^{-1} I_n P \quad \text{point de vue auxiliaire}$$

$$\bullet \quad [d(v)]_{B'} = [v]_{B'} = [d]_{B, B'} [v]_B$$

$$(P'^{-1})P \quad \text{point de vue} \\ \text{changement de coordonnées} \\ \text{de } B \text{ à } B'$$

$$\bullet \quad [d]_{B, B'} = ([d(v_1)]_{B'}, \dots, [d(v_n)]_{B'}) \quad \text{changement de} \\ \text{base de } B' \text{ à } B \\ = ([v_1]_{B'}, \dots, [v_n]_{B'})$$

$$\text{Si } B' = B_{\text{can}}.$$

$$[d]_{B, B'} = [d]_{B, B_{\text{can}}} = \left(\begin{array}{c|c} v_{1, B_{\text{can}}} & \dots & v_{n, B_{\text{can}}} \end{array} \right) \\ \text{changement de base } B_{\text{can}} \text{ à } B$$

$$[d]_{B_{\text{can}}, B} = P^{-1} \quad \text{changement de base } B \text{ à } B_{\text{can}}$$

§ 4.4. Recherche de représentant "simple"

But: Trouver B et B' , de sorte à ce que

$[f]_{B, B'}$ sont simple (idéalement que des 1 et 0)

Exemple: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \longmapsto (6x - 9y + 3z, 2x - 3y + z)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

f est de rang 1, $\text{im}(f) = \text{vect}(3, 1)$

$$\text{ker}(f): 2x - 3y + z = 0$$

base pour $\text{ker}(f) = (1, 0, -2), (0, 1, 3)$

compléter la base de $\text{ker}(f)$:

$$B = (1, 0, 0), (1, 0, -2), (0, 1, 3)$$

$$\begin{aligned} [f]_{B, B_{\text{can}}} &= \left([f(1, 0, 0)]_{B_{\text{can}}} \mid [f(1, 0, -2)]_{B_{\text{can}}} \mid [f(0, 1, 3)]_{B_{\text{can}}} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

compléter la base de $\text{im}(f)$:

$$B' = (3, 1), (1, 0)$$

$$\begin{aligned} [f]_{B_{\text{can}}, B'} &= \left([f(e_1)]_{B'}, [f(e_2)]_{B'}, [f(e_3)]_{B'} \right) \\ &= \left((6, 2)_{B'} \mid (-9, -3)_{B'} \mid (3, 1)_{B'} \right) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• combinaison de B et B'.

$$B = (1, 0, 0), (1, 0, -2), (0, 1, 3)$$

$$B' = (3, 1), (1, 0)$$

$$[f]_{B, B'} = \left([f(v_1)]_{B'} \mid [f(v_2)]_{B'} \mid [f(v_3)]_{B'} \right)$$

$$= \left((6, 2)_{B'} \mid (0, 0)_{B'} \mid (0, 0)_{B'} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B'' = (6, 2), (1, 0)$$

$$[f]_{B, B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et soit $r = \text{rg}(f)$. Alors il existe des bases B de $\mathbb{R}^n$ et B' de $\mathbb{R}^p$ d.g.

$$[f]_{B, B'} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$$

preuve: On commence par choisir une base pour le noyau de f:

$$v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n \quad \left(\begin{array}{l} \text{thm du rang:} \\ \underbrace{\dim \operatorname{im}(f)}_r + \dim \operatorname{ker}(f) = n \end{array} \right)$$

complétons cette famille pour obtenir une base de $\mathbb{R}^n$

$$\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_r}_{\text{compléter}} \quad \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{bas de } \operatorname{ker}(f)} = \mathcal{B}$$

Pour $\mathcal{B}'$ on prend

$$\underbrace{f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_r)}_{\text{linéairement indépendants}} \quad \underbrace{w_{r+1}, \dots, w_p}_{\text{compléter}} = \mathcal{B}'$$

On a alors

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} &= \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}'}, \dots, [f(v_r)]_{\mathcal{B}'}, [f(v_{r+1})]_{\mathcal{B}'}, \dots, [f(v_n)]_{\mathcal{B}'} \right) \\ &= \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}'}, \dots, [f(v_r)]_{\mathcal{B}'}, 0, \dots, 0 \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

□.

Exemples: (e) : $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (x - y + 3z, 2x - 3y + 9z, x + y + 7z)$$

(1) Calcul de $\operatorname{ker}(f)$:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker(f) = \text{vect}(5, 2, -1)$$

(2) Compléter en une base B:

$$B = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (5, 2, -1)$$

(3) Calculer $f(B)$:

$$\begin{aligned} B' &= f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), \underbrace{f(5, 2, -1)}_{=0} \\ &= (1, 2, 1), (-1, -3, 1), 0 \end{aligned}$$

(4) Compléter pour obtenir B' :

$$B' = (1, 2, 1), (-1, -3, 1), \underbrace{(1, 0, 0)}_{=0}$$

$$[f]_{B, B'} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

(b) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ invertible.

(1) v. Rien à faire: $\ker(f) = \{ (0, 0, 0, 0) \}$

(2) Base

(3) $f(e_1), \dots, f(e_4) = B'$ ((4) v.)

$$[f]_{B, B'} = \mathbb{I}_4$$

§ 4.5. Ensemble des représentants

Def: Soient $A, B \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$. On dit qu'elles sont équivalentes ssi $\exists P, Q$ inversibles s.g.

$$B = Q^{-1} A P.$$

Elles sont dites colonnes - équivalentes ssi

$$B = A P$$

Elles sont dites lignes - équivalentes ssi

$$B = Q^{-1} A$$

Remarques: (a) la matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ correspond à un changement de base au départ, alors que $Q \in M_p(\mathbb{R})$ correspond à un changement de base à l'arrivée.

(b) P agit sur les colonnes de A
 Q agit sur les lignes de A .

Si A est de rang r ($\leq \min(n, p)$) on peut écrire

$$A = C_1 L_1 + \dots + C_r L_r$$

où $C_1, \dots, C_r$ sont des colonnes indépendantes
et $L_1, \dots, L_r$ sont des lignes indépendantes

Proposition:

B est équivalente à $A \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$

B est colonne-équivalente à $A \iff \text{im}(A) = \text{im}(B)$

B est ligne-équivalente à $A \iff \text{ker}(A) = \text{ker}(B)$

preuve: Montrons la deuxième affirmation:

Supposons que $B = AP$. Écrivons

$A = C_1 L_1 + \dots + C_r L_r$. On aura donc

$$B = C_1 \underbrace{(L_1 P)}_{L'_1} + \dots + C_r \underbrace{(L_r P)}_{L'_r}$$

B a donc une décomposition $C-L$ réalisée en r termes. Donc, $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = r$.

Puisque on a pas changé les colonnes,
 $\text{im}(A) = \text{im}(B)$.

Supposons que $\text{im}(A) = \text{im}(B)$. On peut donc écrire

$$A = C_1 L_1 + \dots + C_r L_r$$

$$B = C_1 L'_1 + \dots + C_r L'_r$$

On veut trouver $P \in M_n(\mathbb{R})$ i.7.

$$L_1 P = L'_1, \dots, L_r P = L'_r$$

On a donc

$$\left(\begin{array}{c|c} L_1 & \\ L_2 & \\ \vdots & \\ L_r & \\ e_{r+1} & \\ \vdots & \\ e_n & \end{array} \right) P = \left(\begin{array}{c} L_1' \\ \vdots \\ L_r' \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \right)$$

complète
avec
 $n-r$
lignes indep.
cadenes.

$$\Rightarrow P = \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} L_1' \\ \vdots \\ L_r' \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \right)$$

On est donc arrivé à trouver P $\square$

Exemples:

$$(a) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x+2y, 3x+6y)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x+y, 2x+2y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2), \quad A_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 1)$$

Par la proposition précédente, puisque $\text{rg}(A_f) = \text{rg}(A_g)$, on a $A_g = Q^{-1} A_f P$

$$\ker(f) = x+2y=0, \quad \ker(g) : x+y=0$$

$\Rightarrow \ker(f) \neq \ker(g) \Rightarrow A_f$ pas ligne-équivalente à A_g .

$\text{vec}(d) = \text{vec}(1, 3) \neq \text{vec}(g) = \text{vec}(1, 2)$
 $\Rightarrow A_d$ pas colonne-équivalente à A_g .

Reprenons colonne - ligne:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 1) = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 2) P$$

On va chercher P et Q d.y.

$$(1 \ 1) = (1 \ 2) P \quad \text{et} \quad Q \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

• on "devine": $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

• plus systématique:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \leftarrow L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{aligned}$$

$$Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array} \end{aligned}$$

$$Q^{-1} = \left(-\frac{1}{3} \mid \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ -3 & -1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \leftarrow L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 + L_1 \end{array}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = 2 \quad (\det(A) = 0 = \det(B))$$

$$\ker(A) : \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 = x - 2y + z$$

$$\ker(B) : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 3 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 = 7x + y - 5z$$

Donc A et B non colonne-équivalentes

$$\bullet \ker(A) \text{ par c-l.} \quad \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

(ou par syst. d'éq)

$$\ker(A) = \text{vect}(1, 2, -1)$$

$$= \ker(B)$$

Donc, A et ligne-équivalentes à B

$$\Rightarrow B = Q^{-1}A$$

$$\text{On va utiliser } L_1 = (1, 0, 1) \\ L_2 = (0, 1, 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 3L_1 + L_2 \\ L_2 + L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (1, 0, 1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1, 2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 2)$$

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

6. REDUCTION DES MATRICES

Bret: Trouver B pour $\mathbb{R}^2$ f.g.

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ et } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{Si } [f]_B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } B = v_1, v_2$$

$$\text{alors } [f(v_1)]_B = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, [f(v_2)]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f(v_1) = \lambda v_1 \text{ et } f(v_2) = \mu v_2$$

$$\Leftrightarrow f(v_1) - \lambda v_1 = 0 \text{ et } f(v_2) - \mu v_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_1 \in \ker(f - \lambda \text{id}), v_2 \in \ker(f - \mu \text{id})$$

$$\Leftrightarrow f - \lambda \text{id} \text{ et } f - \mu \text{id} \text{ pas inversibles.}$$

$$\Leftrightarrow \det(A_{f - \lambda \text{id}}) = 0 = \det(A_{f - \mu \text{id}})$$

Def: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire et A_f sa matrice associée. On appelle polynôme caractéristique de f , qu'on note χ_f et défini par

$$\chi_f(\lambda) := \det(A_f - \lambda I_2)$$

Trois cas possible:

• Si on note $\chi_f(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ alors on note $\Delta = b^2 - 4ac$ et

$\Delta < 0$: $\chi_f(\lambda)$ ne s'annule jamais. Pas de réduction diagonale.

$\Delta = 0$: $\chi_f(\lambda)$ s'annule pour une valeur de λ (cas à traiter plus tard)

$\Delta > 0$: Deux valeurs distinctes pour λ avec $\chi_f(\lambda) = 0$. f diagonalisable.

Calcul de $\chi_f(\lambda)$:

Posons $A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A_f - \lambda I_2 = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \chi_f(\lambda) &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= ad - bc - d\lambda - a\lambda + \lambda^2 \\ &= \lambda^2 - \text{Tr}(A_f)\lambda + \det(A_f) \end{aligned}$$

$$\Delta = \text{Tr}(A_f)^2 - 4\det(A_f)$$

Exemple: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{4}(5x + 9y, 3x - y)$$

$$A_f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \chi_f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$(\lambda + 1)(\lambda - 2)$

$\Rightarrow$, pour $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$, on a

$$\ker(A_f + \mathbb{1}), \ker(A_f - 2\mathbb{1}) \neq \{0\}$$

$\lambda = -1, 2$ sont les valeurs propres de f .

Remarque: le polynôme $\chi_f(\lambda)$ ne dépend pas de la base dans laquelle on le calcule.

$$\det([f]_{B_{can}} - \lambda \mathbb{I}_2) = \det([f]_B - \lambda \mathbb{I}_2),$$

$$\text{car } \text{Tr}[f]_{B_{can}} = \text{Tr}[f]_B$$

$$\det[f]_{B_{can}} = \det[f]_B.$$

§ 6.2. Vecteurs propres:

Thm (Cayley-Hamilton): Soit $\chi_f(\lambda)$, le

polynôme caractéristique de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

$$\text{Alors } \chi_f(A_f) = 0$$

preuve: Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

On a $(A - \lambda \mathbb{I}_2)(\bar{A} - \lambda \mathbb{I})$

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d-\lambda & -b \\ -c & a-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a-\lambda)(d-\lambda) - bc & 0 \\ 0 & -bc + (a-\lambda)(d-\lambda) \end{pmatrix} =$$

$$= \chi_f(\lambda) \mathbb{I}_2 \quad \text{Donc, } \chi_f(A) = 0 \mathbb{I}_2.$$

Exemple: Reprenons $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}$

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow \text{C.I.} \quad \chi_f(A) = 0 = \underline{(A - 2\mathbb{I}_2)} \underline{(A + \mathbb{I}_2)}$$

$$\Rightarrow \underline{A(A + \mathbb{I}_2) = 2(A + \mathbb{I}_2)}$$

$$\underline{A(A - 2\mathbb{I}_2) = -(A - 2\mathbb{I}_2)}$$

$$\Rightarrow A + \mathbb{I}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A - 2\mathbb{I}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (9, 3)$ est vecteur propre pour A
avec valeur propre $+2$ et

$(-1, 1)$ est vecteur propre pour A
avec valeur propre -1 .

On remarque que $\text{vect}(9, 3)$ est un sous-espace propre de f associé à 2 et $\text{vect}(1, -1)$ est un ss-espace propre de f associé à -1 .

Puisque $f(9, 3) = 2(9, 3)$

$$f(1, -1) = -(1, -1)$$

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } B = \begin{pmatrix} 9, 3 \\ -1, 1 \end{pmatrix}$$

§6.3. Projecteurs sur les espaces propres

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\chi_f(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$,

$\alpha \neq \beta$.

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a - \alpha \\ c \end{pmatrix} = [V_\beta]_{B_{can}}$$

$$\begin{pmatrix} a - \beta \\ c \end{pmatrix} = [V_\alpha]_{B_{can}}, \quad \text{où}$$

V_α et V_β sont des vecteurs propres pour f associés aux valeurs propres α et β .

Ceci grâce au thm. C-11:

$$(A - \alpha)(A - \beta) = 0$$

Observons que $\left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 = \left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$

$$= \left(\frac{A-\beta+\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

$$= \left(\frac{A-\beta}{\beta-\alpha} + 1\right)\left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=0 \text{ (C-1+)}}$

Similairement :

$$\left(\frac{A-\beta}{\alpha-\beta}\right)^2 = \left(\frac{A-\beta}{\alpha-\beta}\right)$$

On remarque que

$$\bullet \left(\frac{A-\beta}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = 0$$

$$\bullet \left(\frac{A-\beta}{\alpha-\beta}\right) + \left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \underline{1}$$

On a alors que

$$\left(\frac{A-\beta}{\alpha-\beta}\right) = P_\alpha, \quad \left(\frac{A-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = P_\beta$$

et $\ker(P_\alpha) = \ker(P_\beta)$

$$\ker(P_\beta) = \ker(P_\alpha)$$

Exemple: $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \alpha = -1, \beta = 2$

$$P_{-1} = \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{-3}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Polynom des B

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2[P_2]_B - 1[P_{-1}]_B$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\phi = 2P_2 - 1P_{-1}}$$

$$2 \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1 \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- calculer $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$
- factoriser $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$
- $P_\alpha = \left(\frac{A - \beta}{\alpha - \beta} \right)$, $P_\beta = \left(\frac{A - \alpha}{\beta - \alpha} \right)$
- $A_\phi = \alpha P_\alpha + \beta P_\beta$

Exemple:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{4}(5x + 9y, 3x - y)$$

$$A_f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \chi_f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\bullet \chi_f(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 1) \\ \lambda = 2 \quad \lambda = -1$$

$$\bullet P_2 = \frac{A + I}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right) \\ = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur propre associé à } \lambda = 2$$

$$P_{-1} = \frac{A - 2I}{-3} = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \right) \\ = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{vecteur propre associé à } \lambda = -1$$

$$\bullet \text{Vérification: } A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\{f\}_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } B = (3, 1), (1, -1)$$

§ 3.5. Cas où $\Delta = 0$:

Dans ce cas $\chi_f(\lambda)$ possède qu'une racine :

$$\chi_f(\lambda) = (\lambda - \omega)^2 \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{\text{Tr}(A_f)}{2}$$

Cayley-Hamilton: $(A - \omega I_2)^2 = O_2$

$$\Leftrightarrow (A - \omega)(A - \omega)v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

$$\Leftrightarrow A(A - \omega)v = \omega(A - \omega)v$$

$$\Leftrightarrow \underline{(A - \omega)v \text{ est vecteur propre par } A}$$

avec valeur propre 1

On choisit comme base $v_1 \in \mathbb{R}^2$, non propre
et $\underline{(A - \omega)v_1 = v_2}$

Mais:

$$\underline{Av_1 = v_2 + \omega v_1}$$

$$\underline{Av_2 = \omega v_2}$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 1 & \omega \end{pmatrix} \quad \text{si } B = v_1, v_2$$

$$[f]_{B'} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \quad \text{si } B' = v_2, v_1$$

forme réduite de A_f

Méthode à suivre pour $\Delta = 0$:

- Prendre par v_1 un vecteur non propre pour A .

- Prendre $v_2 = (A - \omega) v_1$

- Prendre $B = v_1, v_2$ ("machine à laver") ($B' = v_2, v_1$)

- On obtient

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 1 & \omega \end{pmatrix} \quad ([f]_{B'} = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix})$$

Exemple: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (5x + 3y, -3x - y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \chi_f(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$= (\lambda - 2)^2, \quad \underline{\underline{\omega = 2}}$$

- on prend un vecteur non propre, p.ex.

$$v_1 = (1, 0)$$

- $v_2 = (A - 2)v_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-2 & 3 \\ -3 & -1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$v_2 = (3, -3)$$

- on prend $B = (1, 0), (3, -3)$

Vérification:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B' = (3, -3), (1, 0)$$

Remarque:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (2x, 2y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \text{id}_2$$

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

∴ P est un dyant de base:

$$P^{-1} 2 \mathbb{I}_2 P = P^{-1} 2 P = 2 P^{-1} P = 2 \mathbb{I}_2$$

§ 5.6. Cas où $\Delta < 0$:

$\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A)$ n'est pas factorisable (sur $\mathbb{R}$)

$$\chi_f(\lambda) = \left(\lambda - \frac{\text{Tr}(A)}{2} \right)^2 + \det(A) - \frac{\text{Tr}(A)^2}{4}$$

$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \frac{\text{Tr}(A)^2}{4}$ $-4\Delta > 0$

$$\Rightarrow \chi_f(1) = (1 - \underbrace{\omega}_{\frac{\text{Tr}(A)}{2}})^2 + \underbrace{\xi^2}_{>0}$$

Cayley-Hamilton:

$$(A - \omega)^2 + \xi^2 = O_2$$

- on prend pour v_1 n'importe quel vecteur dans $\mathbb{R}^2$ *.
- on prend pour $v_2 = \frac{A - \omega}{\xi} v_1$
- $[f]_B = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}$ si $B = v_1, v_2$

En effet, $A v_1 = \xi v_2 + \omega v_1$

$$A v_2 = A \frac{A - \omega}{\xi} v_1$$

$$= (A - \omega) \frac{A - \omega}{\xi} v_1 + \omega \frac{A - \omega}{\xi} v_1$$

$$\stackrel{\text{C-H.}}{=} -\xi v_1 + \omega v_2$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}$$

forme réduite

Exemple: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (3x + 4y, -2x - y)$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$
$$= (\lambda - 1)^2 + (2)^2$$

$\uparrow$
 $\frac{\text{Tr}(A)}{2}$

$$\bullet v_1 = (0, 1)$$

$$\bullet v_2 = \frac{A - \omega I}{\xi} v_1 = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{2} v_1$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}{2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2 = (2, -1)$$

Vérification: $A v_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A v_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [d]_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

où $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$= \sqrt{5} \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{5} \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{5} \cos \varphi + i \sqrt{5} \sin \varphi = \sqrt{5} e^{i\varphi}$$

Thus $\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$

$$\chi_f(\sqrt{5} e^{i\varphi}) = 5 e^{i2\varphi} - 2\sqrt{5} e^{i\varphi} + 5$$

$$= 5(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) - 2\sqrt{5} \left(\underbrace{\cos \varphi}_{\frac{1}{\sqrt{5}}} + i \underbrace{\sin \varphi}_{\frac{2}{\sqrt{5}}} \right) + 5$$

$$= 5(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) - 2 - 4i + 5$$

$$= 5(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + i(2\sin \varphi \cos \varphi)) + 3 - 4i$$

$$= -3 + 4i + 3 - 4i = 0 \quad \checkmark$$

§ 5.7. Synthèse:

(1)

- Calculer A_f
- Calculer $\chi_f(\lambda)$
 $(\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A))$

(2)

- Factoriser $\chi_f(\lambda)$
 trois cas
 donnent des
 formes réduites

(3)

- chercher une
 base B où f
 est réduite

$$\Delta > 0$$

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \omega)(\lambda - \xi),$$

$$\xi \neq \omega$$

$$R_f = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}$$

$$\Delta = 0$$

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \omega)^2$$

$$R_f = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} = A_f$$

$$R_f = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 1 & \omega \end{pmatrix}$$

$$\Delta < 0$$

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \omega)^2 + \xi^2$$

$$R_f = \begin{pmatrix} \omega & -\xi \\ \xi & \omega \end{pmatrix}$$

(3) Recherche d'une base de réduction:

$$\begin{array}{lcl} \frac{A - \xi}{\omega - \xi} = P_{\omega} & : & v_1 \text{ non-propre} \\ \frac{A - \omega}{\xi - \omega} = P_{\xi} & : & v_2 = (A - \omega)v_1 \\ & & \left(\frac{A - \omega}{\xi} \right) v_1 = v_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} v_1 \in \mathbb{R}^{2,*} \\ \end{array}$$

Exemples: (a) A_f est une projection ($A_f^2 = A_f$)

$\text{rg}(A) = 0$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & \omega \end{pmatrix}$$

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2$$

$$R_f = A_f$$

$\text{rg}(A) = 1$

$$\det(A) = 0,$$

$$\text{Tr}(A) = 1,$$

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$$

$$R_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A) = 2$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

$$R_f = A_f$$

(b) A est de $\text{rg} = 1$.

$t = \text{Tr}(A) \neq 0$

$$\chi_f = \lambda^2 - \lambda t = \lambda(1 - t)$$

$$R_f = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$\text{Tr}(A) = 0$

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2$$

$$R_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_f^2 = 0 \text{ (nilpotent)}$$

(c) Si A est h.q. $\det(A) = 1$, $\Delta_{\chi_f} < 0$:

$$R_f = \begin{pmatrix} \omega - \xi & \\ \xi & \omega \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1 = \det(R_f) = \omega^2 + \xi^2$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = \pm \arccos\left(\frac{\omega}{1}\right) = \text{sgn}(\xi) \arccos(\omega)$$

§5.8. Puissances $n^{\text{ème}}$.

But: Calculer efficacement A^n

$$\text{Si } d: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(A_d)^n = A_d \circ \dots \circ A_d, \text{ où}$$

$$d^n = \underbrace{d(d(d(\dots (x))))}_{n \text{ fois}}$$

Puisque $P^{-1} A_d P = R_d$ (si P est un
changement de base
vers une base B
de réduction)

$$A_d = P R_d P^{-1}$$

Mais alors:

$$A_d^n = \overbrace{A_d \cdot A_d \cdot \dots \cdot A_d}^{n \text{ fois}}$$

$$= P R_d P^{-1} P R_d P^{-1} \dots P R_d P^{-1}$$

$$= P R_d R_d \dots R_d P^{-1} = P R_d^n P^{-1}$$

<u>Proposition:</u>	$\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \tilde{E} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \omega^n & 0 \\ 0 & \tilde{E}^n \end{pmatrix}$
---------------------	---

preuve: par récurrence. pour $n=1$ c'est évident.

Supposons l'égalité vraie pour n . Alors

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}^{u+1} &= \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}^u \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{hyp. d.} \\ \text{rec.}}}{=} \begin{pmatrix} \omega^u & 0 \\ 0 & \xi^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{u+1} & 0 \\ 0 & \xi^{u+1} \end{pmatrix} \checkmark.
 \end{aligned}$$

□.

Proposition: $\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^u = \begin{pmatrix} \omega^u & u\omega^{u-1} \\ 0 & \omega^u \end{pmatrix}$

preuve: par récurrence (en exercice)

Aide manuelle (binôme de Newton):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^u &= \underbrace{\left(\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)}_{(a+b)^u}^u \\
 &= \sum_{k=0}^u \binom{u}{k} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{u-k} \\
 &= \underbrace{\binom{u}{u} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0}_{k=u} + \underbrace{\binom{u}{u-1} \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}^{u-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^1}_{k=u-1} \\
 &= 1 \cdot \begin{pmatrix} \omega^u & 0 \\ 0 & \omega^u \end{pmatrix} \mathbb{I}_2 + u \begin{pmatrix} \omega^{u-1} & 0 \\ 0 & \omega^{u-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \omega^u & 0 \\ 0 & \omega^u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & u\omega^{u-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark. \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposition:

$$\begin{pmatrix} \omega - \xi \\ \xi - \omega \end{pmatrix}^n = \rho^n \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$$

où $\rho = \sqrt{\xi^2 + \omega^2}$, $\theta = \operatorname{sgn}(\xi) \arccos\left(\frac{\omega}{\rho}\right)$

preuve: aux exercices par récurrence. $\square$

Exemple:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,

$$\# \text{ (couples des mois } n) = \underline{l_n = l_{n-1} + l_{n-2}}$$

$$\text{et } l_0 = 1 = l_1$$

(suite de Fibonacci)

$$L_n = \begin{pmatrix} l_n \\ l_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow L_{n+1} = \begin{pmatrix} l_n + l_{n-1} \\ l_n \end{pmatrix}$$

$$L_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_n \\ l_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L_n$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 L_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 L_{n-2}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_V^n L_1$$

$$\chi_V(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, \quad \omega_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $-\operatorname{Tr}(A) \quad \det(A)$
 $(\lambda - \omega_+)(\lambda - \omega_-)$

$$\omega_- = \frac{-1}{\omega_+}$$

$$R = \begin{pmatrix} \omega_+ & 0 \\ 0 & \omega_- \end{pmatrix}, \quad P_{\omega_{\pm}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \omega_{\pm}}{\pm \sqrt{5}}$$

$$= \frac{\pm 1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \omega_{\pm} & 1 \\ 1 & -\omega_{\pm} \end{pmatrix} \quad B = (\omega_+, 1), (\omega_-, 1)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow V^u = P R^u P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_+ & \omega_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_+^u & 0 \\ 0 & \omega_-^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_- \\ -1 & \omega_+ \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow L_{u+1} = V^u L_1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \omega_+ & \omega_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_+^u & 0 \\ 0 & \omega_-^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_- \\ -1 & \omega_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \omega_+^{u+1} & \omega_-^{u+1} \\ \omega_+^u & \omega_-^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \omega_- \\ \omega_+ - 1 \end{pmatrix}$$

ω_+ (above $1 - \omega_-$)
 $-\omega_-$ (below $\omega_+ - 1$)
 $1 - \omega_- = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (below $\omega_+ - 1$)

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \omega_+^{u+2} - \omega_-^{u+2} \\ \omega_+^{u+1} - \omega_-^{u+1} \end{pmatrix} = L_{u+1} = \begin{pmatrix} \ell_{u+1} \\ \ell_u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{#(complex au mois } u) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\omega_+^{u+1} - \omega_-^{u+1})$$

$$(4) \quad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (3x - y, 5x - y)$$

on veut $f^{(n)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Calculons } A_f^n$$

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \text{cas 3 cercles } \omega = 1, \xi = 1$$

$$R_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = (1, 0)$$

$$\begin{aligned} [v_2]_{B_{\text{can}}} &= \left(\frac{A - \omega I}{\xi} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_2 = (2, 5)$$

$$A_f = P R_f P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow A_f^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5^n}$$

$$\Rightarrow A_f^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5^n}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} \cos \pi/4 & -\sin \pi/4 \\ \sin \pi/4 & \cos \pi/4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5^n}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{|\vec{z}|^4}{5} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos u\pi/4 & -\sin u\pi/4 \\ \sin u\pi/4 & \cos u\pi/4 \end{pmatrix}}_{\text{périodicit  de 8}} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons $u = 400'002 = 400'000 + 2$

$$\begin{aligned} f^{400'002} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{|\vec{z}|^{400'002}}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{2^{200'001}}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \frac{2^{200'001}}{5} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 25 & -10 \end{pmatrix} \\ &= 2^{200'001} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow f^{400'002}(x, y) &= 2^{200'001} (2x - y, 5x - 2y) \end{aligned}$$

5 Application aux  q. diff. linéaires

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\exp(A) = \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots$$

$$\text{si } A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\omega \end{pmatrix} P^{-1}$$

Supposons on veut résoudre

$$\underline{f'' + 4f' + 3f = 0}, \quad \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$F = \begin{pmatrix} d' \\ d \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} d'' \\ d' \end{pmatrix}$$

$$\underline{F'} = \begin{pmatrix} d'' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4d' - 3d \\ d' \end{pmatrix} = \underline{A F}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F = \exp(Ax) F(x=0)$$

en effet, $\frac{d}{dx} F = \underbrace{A \exp(Ax) F(x=0)}_F$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} F = A F \quad \text{si } F = \exp(Ax) F(0)$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow V_{-3} = (-3, 1), \quad V_{-1} = (-1, 1)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \exp(Ax) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow F(x) = \exp(Ax) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3e^{-3x} & -e^{-x} \\ e^{-3x} & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 3e^{-3x} - 2e^{-x} \\ -e^{-3x} + 2e^{-x} \end{pmatrix} = F(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(x) &= 2e^{-x} - e^{-3x} & -3 \\ f'(x) &= -2e^{-x} + 3e^{-3x} & -4 \\ f''(x) &= 2e^{-x} - 9e^{-3x} & ? \end{aligned}$$

$$-4f' = 8e^{-x} - 12e^{-3x}$$

$$-3f = -6e^{-x} + 3e^{-3x}$$

$$\hline 2e^{-x} - 9e^{-3x} = f''(x) \quad \checkmark$$

$$f(0) = 2 - 1 = 1, \quad f'(0) = -2 + 3 = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{Si } f''' + af'' + bf' + cf = 0 \quad |$$

$$F = \begin{pmatrix} f'' \\ f' \\ f \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} f''' \\ f'' \\ f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'' \\ f' \\ f \end{pmatrix}$$