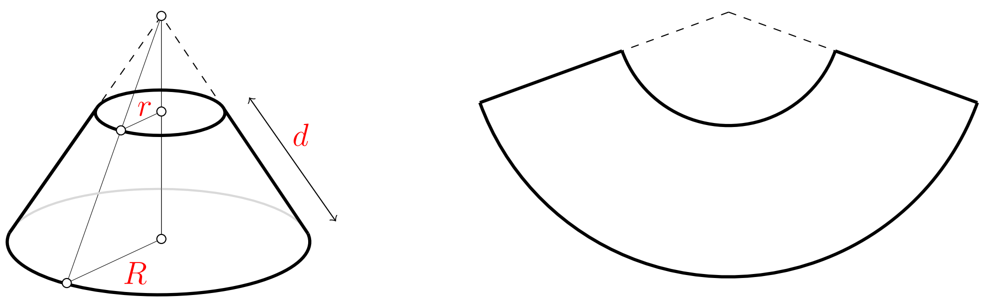
Surface latérale du tronc de cône

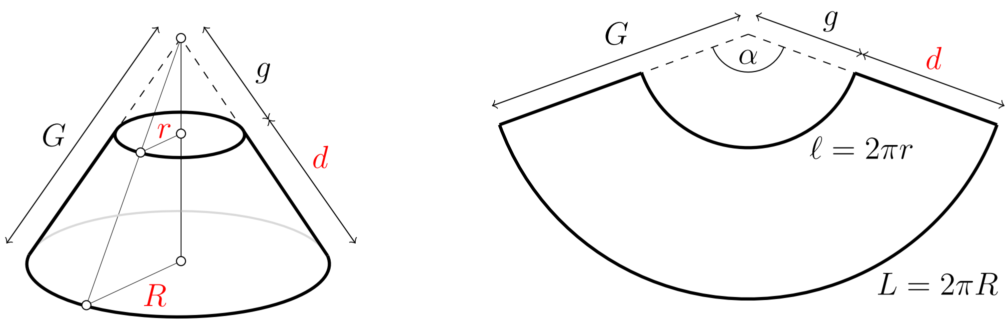
On considère un tronc de cône de révolution défini par les rayons r et R de ses deux bases et par la longueur g des génératrices.

Ce tronc de cône est une surface développable : en le découpant le long d'une génératrice, on obtient un secteur de couronne circulaire.



Déterminer la surface A de ce tronc de cône en fonction des données r, R et d.

Notons G la longueur des génératrices du grand cône et g celle du petit cône.



La surface A du tronc de cône s'exprime comme la différence entre le grand secteur circulaire et le petit. Soit α l'angle au centre des secteurs circulaires :

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot G^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot g^2 = \frac{\alpha}{2} \cdot \left(G^2 - g^2\right) = \frac{\alpha}{2} \cdot (G+g) \cdot (G-g) \ ,$$

$$A = \frac{\alpha}{2} \cdot (G+g) \cdot d \, .$$

Les longueurs des arcs ℓ et L des secteurs circulaires sont les circonférences des bases :

$$\ell = \alpha \cdot g = 2\pi \, r \qquad \text{et} \qquad L = \alpha \cdot G = 2\pi \, R \, ,$$

on en déduit l'expression de α en fonction de r et g ou de R et G :

$$\alpha = \frac{2\pi \, r}{g} = \frac{2\pi \, R}{G} \, .$$

Et en remplaçant α par $\dfrac{2\pi\, R}{G}$ dans l'expression de A :

$$A \;=\; \frac{\pi\, R}{G}\cdot (G+g)\cdot d \;=\; \pi\, R\cdot \frac{G+g}{G}\cdot d \;=\; \pi\, R\cdot \left(1+\frac{g}{G}\right)\cdot d\,.$$

On vient de voir que grâce à Thalès, le rapport des génératrices est égal au rapport des rayons :

$$\alpha = \frac{2\pi\, r}{g} = \frac{2\pi\, R}{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{G} = \frac{r}{R}\,,$$

$$A \;=\; \pi\, R\cdot \left(1+\frac{r}{R}\right)\cdot d \;=\; \pi\cdot (R+r)\cdot d \;=\; \underbrace{2\pi \;\cdot\; \underbrace{\frac{r+R}{2}}_{\text{rayon moyen}}}_{\text{circonférence moyenne}} \;\cdot\; d\,.$$
