

Série 23: Aires de régions du plan

Ex-23-01: Calculer l'aire des domaines finis compris entre les courbes définies par les équations suivantes :

- a) $y = \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}$ et $y = \arcsin\left(\frac{x}{\pi}\right)$. Intégrer d'abord par rapport à x , puis par rapport à y .
(*Indication:* ces deux courbes se coupent en $x = 0$ et $x = \pi$.)
- b) $y^2 + 2y - x = 0$, $y - x + 2 = 0$.

Ex-23-02: Montrer que l'aire du domaine limité par l'ellipse

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$$

est égale à πab .

Ex-23-03: Dans le plan, on considère les deux courbes Γ_1 et Γ_2 suivantes :

$$\Gamma_1 : y = \sqrt{3(1-x)}, \quad x \leq 1 \quad \text{et} \quad \Gamma_2 : y + 1 = \frac{4}{9}(x-1)^2.$$

Calculer l'aire du domaine borné contenu dans le demi-plan $y \geq 0$ et limité par les deux arcs Γ_1 et Γ_2 . *Indication:* Γ_1 et Γ_2 se coupent en $x = -2$.

Ex-23-04: Dans le plan, on considère l'arc Γ défini par

$$\Gamma : \quad y = \cos(\sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq \pi^2.$$

Calculer l'aire géométrique du domaine borné, limité par la courbe Γ , l'axe Ox , l'axe Oy et la droite verticale d'équation $x = \pi^2$.

Ex-23-05: Dans le plan, on considère la demi-ellipse Γ définie par

$$\Gamma : \begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

On considère le domaine fini D limité par la courbe Γ , la droite horizontale d'équation $y = -\frac{1}{2}$ et la droite verticale d'équation $x = 1$. Calculer l'aire du domaine D .

Ex-23-06: Déterminer, dans les trois cas suivants, l'aire du domaine situé entre l'axe Ox et l'arc de courbe défini par $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), y \geq 0\}$.

- a) $f(x) = 6x - x^2 - 8$ b) $f(x) = e^{-|x|} - \frac{1}{2}$ c) $f(x) = (2-x) \ln(x)$

Réponses:

Ex-23-01: a) $\pi - \frac{\pi^2}{6}$, b) $\frac{9}{2}$

Ex-23-03: $A = 4$

Ex-23-04: $A = 2\pi$.

Ex-23-05: $A = \frac{\pi-1}{2}$.

Ex-23-06: a) $\frac{4}{3}$, b) $1 - \ln 2$, c) $\ln 4 - \frac{5}{4}$