

Série 22: Intégration de fonctions rationnelles

Ex-22-01: Décomposer, si nécessaire, les fractions rationnelles suivantes en éléments simples ; puis chercher les primitives des fonctions ainsi définies.

a) $a(x) = \frac{1-x}{5+4x+x^2}$

d) $d(x) = \frac{x^6+1}{(x^2+1)^2}$

b) $b(x) = \frac{2x+5}{4x^2-12x+9}$

e) $e(x) = \frac{4x^3+2x+2}{4x^4+1}$

c) $c(x) = \frac{3x^2+1}{(x^2+x)(x^2+1)}$

Ex-22-02: Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{5}{x^2} \ln(x^3 - 2x^2 + 5x), \quad x > 0.$$

Ex-22-03: Calculer les primitives des fonctions

a) $f(x) = \frac{5}{x^2 + 2x\sqrt{x} + 10x},$

b) $g(x) = \frac{1 + \tanh(x)}{4 + \tanh^2(x)}$

Ex-22-04: Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction

$$f(x) = \frac{2 + \sqrt{x-4}}{x(x-4)}, \quad x > 4.$$

Ex-22-05: Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction

$$f(x) = \frac{4e^x - 5}{e^{2x} - 2e^x + 5}.$$

Réponses:**Ex-22-01:**

a) $\int \frac{1-x}{5+4x+x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln(5+4x+x^2) + 3 \arctan(x+2) + C$

b) $\int \frac{2x+5}{4x^2-12x+9} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-3| - \frac{4}{2x-3} + C$

c) $\int \frac{3x^2+1}{(x^2+x)(x^2+1)} dx = \ln|x| - 2 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctan(x) + C$

d) $\int \frac{x^6+1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 3 \arctan(x) + C$

e) $\int \frac{4x^3+2x+2}{4x^4+1} dx = \frac{1}{2} \ln(2x^2+2x+1) + \arctan(2x-1) + C$

Ex-22-02: $\int f(x) dx = -\frac{5}{x} \ln(x^3-2x^2+5x) - 2 \ln(x) - \frac{5}{x} + \ln(x^2-2x+5) + 4 \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + C$

Ex-22-03:

a) $\int g(x) dx = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{x+2\sqrt{x+10}}\right) - \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{3}\right) + C$

b) $\int g(x) dx = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{4+\tanh^2(x)}{[1-\tanh(x)]^2}\right) + \frac{1}{10} \arctan\left[\frac{\tanh(x)}{2}\right] + C.$

Ex-22-04: $\int f(x) dx = \ln(\sqrt{x-4}) - \frac{1}{2} \ln(x) + \arctan\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right) + C$

Ex-22-05: $\int f(x) dx = -x + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} - 2e^x + 5) + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{e^x-1}{2}\right) + C$