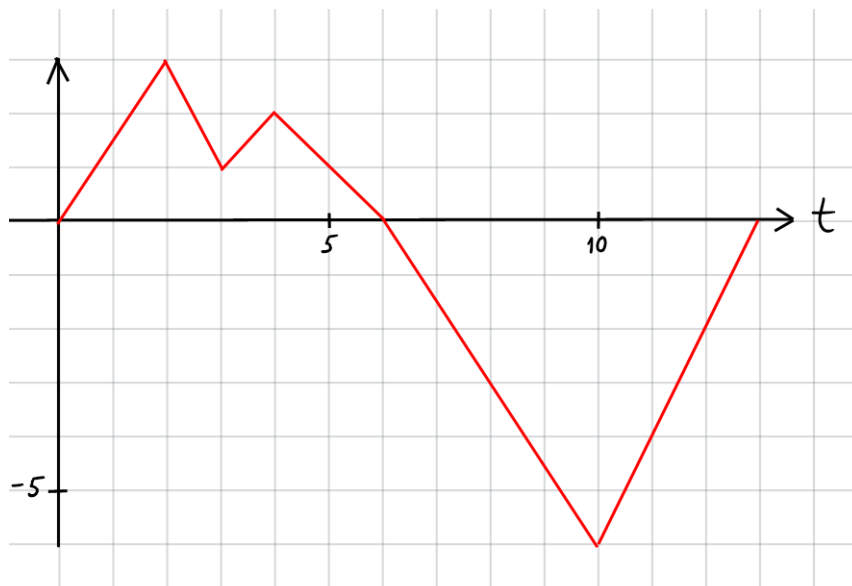


Série 20: Intégrale, primitives

Ex-20-01: Le graphe ci-dessous représente une fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 13]$. Soit $A(x) = \int_0^x f(t) dt$ la fonction aire associée.



- Déterminer les valeurs $f(11)$, $A(3)$, $A(8)$, $A'(5)$, $A'(12)$.
- En quel point la fonction $A(x)$ possède-t-elle un maximum global sur $[0, 13]$?
- En quel point la fonction $A(x)$ possède-t-elle un minimum global sur $[0, 13]$?
- En quel point la fonction $A'(x)$ possède-t-elle un maximum global sur $]0, 13[$?
- En quel point la fonction $A'(x)$ possède-t-elle un minimum global sur $]0, 13[$?

Ex-20-02: Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- | | |
|--|---|
| a) $a(x) = 12(x+1)(x-2)(x-1)$ | h) $h(x) = \frac{1}{1-e^x}$. |
| b) $b(x) = \frac{x^3 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ | i) $i(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$. |
| c) $c(x) = \sin(2x) \cos^2(x)$ | j) $j(x) = \frac{\ln x}{x}$. |
| d) $d(x) = \sin(4x) \cdot \cos(x)$ | k) $k(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$. |
| e) $e(x) = \frac{x}{e^{(x^2+1)}}$ | l) $l(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. |
| f) $f(x) = \tan^2(x)$. | m) $m(x) = \sin^2(ax), \quad a \in \mathbb{R}^*.$ |
| g) $g(x) = \frac{1}{\sin(x) \cdot \cos(x)}$. | |

Ex-20-03: Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- $A(x) = \int_0^{x^3} e^{\cos(t)} dt, \quad x \in \mathbb{R}$
- $B(x) = \int_{\arcsin x}^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad 0 < x < 1$

Ex-20-04: Étudier la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1) dt}{x^6}$$

Réponses:

Ex-20-01:

- a) $f(11) = -4, A(3) = 5, A(8) = 5.5, A'(5) = 1, A'(12) = -2.$
- b) $A(x)$ possède un maximum global en $x = 6.$
- c) $A(x)$ possède un minimum global en $x = 13.$
- d) $A'(x)$ possède un maximum global en $x = 2.$
- e) $A'(x)$ possède un minimum global en $x = 10.$

Ex-20-02:

- a) $\int 12(x+1)(x-2)(x-1)dx = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + C$
- b) $\int \frac{x^3 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{6}{5}x^{5/6} + C$
- c) $\int \sin(2x) \cdot \cos^2(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^4(x) + C.$
- d) $\int \sin(4x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{6} \cos(3x) + C, \text{ ou } -\frac{8}{5} \cos^5(x) + \frac{4}{3} \cos^3(x) + C'$
- e) $\int \frac{x}{e^{(x^2+1)}} dx = -\frac{1}{2} e^{-(x^2+1)} + C$
- f) $\int \tan^2(x) dx = \tan(x) - x + C$
- g) $\int \frac{1}{\sin(x) \cdot \cos(x)} dx = \ln |\tan(x)| + C$
- h) $\int \frac{1}{1-e^x} dx = -\ln |e^{-x} - 1| + C$
- i) $\int \frac{1}{\cosh(x)} dx = -2 \arctan(e^{-x}) + C = 2 \arctan(e^x) + C' = \arctan[\sinh(x)] + C''.$
- j) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2(x) + C$
- k) $\int \frac{1}{x \cdot \ln^2 x} dx = -\frac{1}{\ln x} + C$
- l) $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \sin(\sqrt{x}) + C$
- m) $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + C$

Ex-20-03: $A'(x) = 3x^2 e^{\cos(x^3)}, B'(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}.$

Ex-20-04: La limite existe et vaut $\frac{1}{3}.$