Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 19: Intégrale de Riemann

Ex-19-01: Soit P_n la partition régulière de l'intervalle $[0, a]$, $a > 0$. Calculer les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f(x) = x^3$, associées à P_n. Montrer que ces deux sommes ont la même limite lorsque $n \to \infty$, pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^a x^3\,dx$.

Indication : On pourra utiliser la formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$, démontrée en Analyse A (**Ex**-02-07).

Ex-19-02: Calculer l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$ en calculant les limites des sommes de Darboux sur les partitions régulières de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et en vérifiant qu'elles convergent vers la même valeur.

Indication: On pourra utiliser la formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(nx) - \cos\left((n+1)\,x\right)}{2\,(1-\cos x)}$

Ex-19-03: Soient $0 < a < b < c$, $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^*$, $h_2 \neq h_1$, et soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le a\,, \\ h_1 & \text{si } a < x \le b\,, \\ h_2 & \text{si } b < x < c\,, \\ 0 & \text{si } x \ge c\,. \end{cases}$$

a) Expliciter la fonction $A(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, $(x \ge 0)$ et montrer qu'elle est continue sur $[0, \infty[$.

b) Déterminer l'ensemble des points où A est dérivable, noté $D_{A'}$, et montrer que

$$A'(x) = f(x)\,, \quad \forall x \in D_{A'}\,.$$

c) Esquisser f et A dans le cas où $a = 1, b = 2, c = 6, h_1 = 2, h_2 = -1$,

Ex-19-04: Si $a < b$, $\lambda \neq 0$, montrer que

$$\int_a^b e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda b} - e^{\lambda a}\right).$$

Indication: Pour étudier les sommes de Darboux, on pourra utiliser le fait que $e^{\lambda x}$ est monotone.

Ex-19-05: (**Facultatif**) Démontrer la formule pour $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ donnée dans l'**Ex**-19-02, de deux façons différentes :

a) Par récurrence sur $n \ge 0$.

b) En utilisant la relation : $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$.