Série 17: Courbes paramétrées

Ex-17-01: Considérer la courbe paramétrée $M(t) = (x(t), y(t))$, où

$$\begin{cases} x(t) &= 3t - t^3\,, \\ y(t) &= 1 - t^2 \end{cases}$$

Esquisser un tracé de la courbe pour $t \in [-2, 2]$, en plaçant d'abord $M(t)$ et le vecteur tangent $\dot{\vec{r}}(t)$ aux instants $t_1 = -2$, $t_2 = -\sqrt{3}$, $t_3 = -1$, $t_4 = 0$, $t_5 = 1$, $t_6 = \sqrt{3}$, $t_7 = 2$.

Ex-17-02: Pour les courbes paramétrées suivantes, déterminer :

a) le point stationnaire et la tangente en ce point :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{1-2t} \\ y(t) &= \dfrac{t^3}{1-2t} \end{cases}$$

b) les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + \dfrac{4}{t-1} \\ y(t) &= 2t^2 - \dfrac{16}{t-1} \end{cases}$$

Ex-17-03: On considère dans le plan, la courbe Γ : $\begin{cases} x(t) = \frac{2t^3}{t-1} \\ y(t) = \frac{t^4}{t^2-1} \end{cases}$

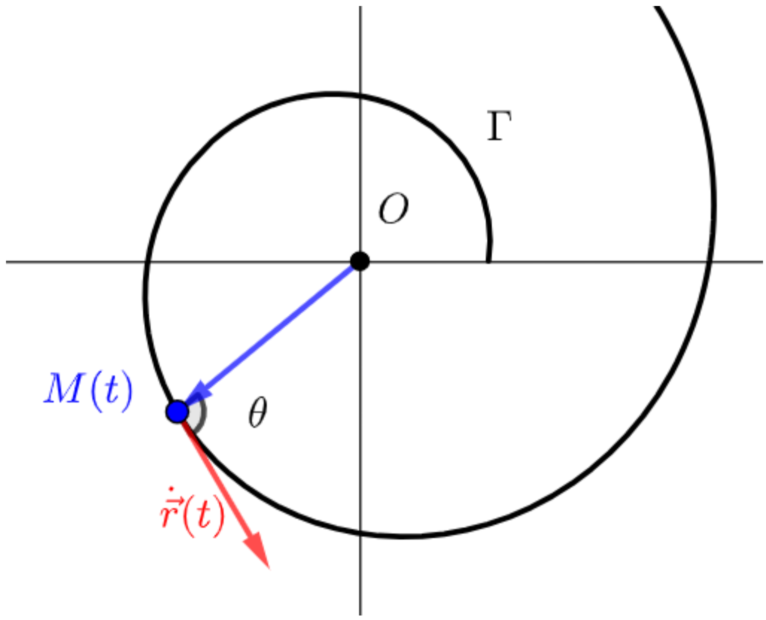
a) Étudier les branches infinies de Γ.

b) Déterminer le point stationnaire de Γ et sa tangente en ce point. Faire l'esquisse locale de la courbe Γ au voisinage de ce point. En quoi ce point est-il remarquable ?

Ex-17-04: Soit la courbe $M(t) = (x(t), y(t))$ paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos(2\pi t) \\ y(t) = e^t \sin(2\pi t). \end{cases}$$

Montrer que le vecteur tangent à la courbe au point $M(t)$ fait avec le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ un angle θ qui ne dépend pas de t.



Rappel : l'angle θ entre deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}|| \cdot ||\vec{w}||}.$$

Ex-17-05: On considère dans le plan, la courbe Γ définie par

$$\begin{cases} x(t) & = \cos(2t) \\ y(t) & = \sin(3t) \end{cases}$$

a) Pour $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, étudier cette courbe (points à tangence horizontale / verticale, points stationnaires) et esquisser son tracé.

b) En utilisant les propriétés de symétrie de $x(t)$ et $y(t)$, en déduire le tracé pour $t \in \mathbb{R}$.

Réponses:

Ex-17-02:

a) Point stationnaire $P(0;0)$ de tangente $y = 0$.

b) Asymptotes obliques $y = 2x$ et $y = -4x + 6$. Tangente horizontale en $(-1, 10)$. Tangente verticale en $(8, -8)$.

Ex-17-03:

a) Branches infinies de Γ :
- Branches paraboliques de direction de pente $m = \frac{1}{2}$.
- Asymptote verticale d'équation $x = 1$.
- Asymptote oblique d'équation $y = \frac{1}{4}(x + 1)$.

b) Le point stationnaire de Γ est l'origine ; c'est un point à tangente horizontale.

Ex-17-04: $\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2}}$