Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 16: Etude de fonctions

Ex-16-01: Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse en donnant une preuve ou un contre-exemple (vous pouvez citer des résultats du cours).

a) Un minimum global d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est forcément un minimum local.

b) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue. Alors f atteint son maximum et son minimum global sur $]a, b[$.

c) Soit $f : \ [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors f atteint son maximum et son minimum global sur $[a, b]$.

d) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \ ]a, b[$, alors f possède un maximum ou un minimum global en a.

e) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Si f n'est pas dérivable en $x_0 \in \ ]a, b[$, alors f atteint un maximum ou un minimum local en x_0.

f) Soit f dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x_0) = 0$ pour $x_0 \in \ ]a, b[$, alors f possède un extremum local en x_0.

g) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors f est continue en 0, dérivable sur un voisinage épointé de 0, et f possède un extremum local en 0, tandis que f' ne change de pas signe en 0.

Rappel : on dit que f' ***change de signe*** *en x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que $f'(x) \leq 0$ pour $x \in \ ]-\delta, x_0[$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \in \ ]x_0, \delta[$ (ou $f'(x) \geq 0$ pour $x \in \ ]-\delta, x_0[$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x \in \ ]x_0, \delta[$).*

Ex-16-02: Étudier les branches infinies du graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - 2x$,

b) $g(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) $h(x) = \ln(e^{-x} + e^{2x+1})$

Ex-16-03: Étudier les fonctions suivantes.

a) $a(x) = x + \sqrt{1 - x}\,$,

b) $b(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$,

c) $c(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2 + 9x}\,$,

d) $d(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\,$,

e) $f(x) = \begin{cases} \arctan\left[\frac{x^2}{4\,(x+1)}\right] & , x \neq -1 \\ \frac{\pi}{2} & , x = -1\,. \end{cases}$

Réponses:

Ex-16-01: VFFVFFV

Ex-16-02:

a) Asymptotes obliques : $y = -3x - \frac{1}{2}$ lorsque $x \to -\infty$, et $y = -x + \frac{1}{2}$ lorsque $x \to +\infty$.

b) Asymptote oblique : $y = -x$ lorsque $x \to -\infty$, asymptote horizontale $y = 0$ lorsque $x \to +\infty$.

c) Asymptotes obliques : $y = -x$ lorsque $x \to -\infty$, $y = 2x + 1$ lorsque $x \to +\infty$.