Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 15: Extrema, Optimisation

Ex-15-**01**: Esquisser le graphe de f, puis déterminer, à l'aide de celui-ci, sans faire de calculs, les extrema globaux (s'ils existent) de la fonction sur chacun des ensembles donnés.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad E_1 = \mathbb{R}, \quad E_2 = [0, 3].$

b) $f(x) = e^{-x^2}, \quad E_1 = \mathbb{R}, \quad E_2 =]-1, 1[, \quad E_3 = [-1, 2].$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad E_1 = \mathbb{R}_+, \quad E_2 = \mathbb{R}_+^*.$

d) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad E_1 = \mathbb{R}_+^*, \quad E_2 = [-1, 1]\backslash\{0\}.$

e) $f(x) = x - E(x), \quad E_1 = \mathbb{R}, \quad E_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad E_3 =]0, 1].$

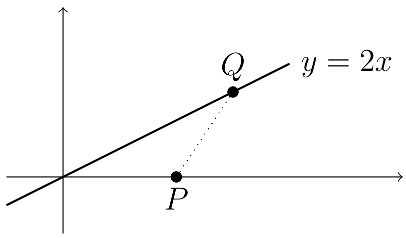
f) $f(x) = |\cos(x)|, \quad E_1 =]0, \pi[, \quad E_2 = \mathbb{R}.$

Ex-15-**02**: A l'aide d'une feuille de carton carrée de côté a, on construit une boîte rectangulaire ouverte en découpant des carrés sur les angles et en pliant les rebords du domaine ainsi obtenu. Comment faut-il couper la feuille pour que le volume de la boîte soit maximum ?

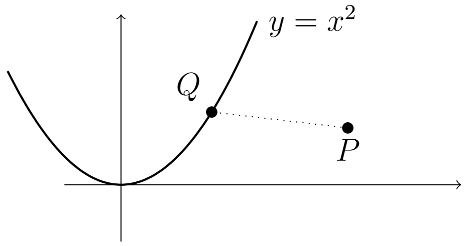
Ex-15-**03**: Soit $p > 0$ fixé. Parmi tous les rectangles de périmètre p, lequel a la plus grande aire et que vaut cette aire ?

Ex-15-**04**:

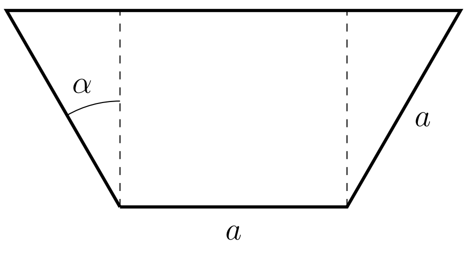
a) Trouver le point Q_* de la droite $y = 2x$ dont la distance au point $P = (1, 0)$ est minimale.



b) Trouver le point Q_* de la parabole $y = x^2$ dont la distance au point $P = (10, 2)$ est minimale.



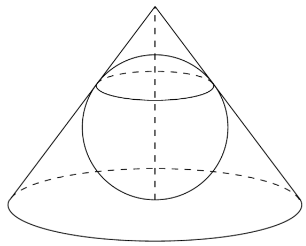
Ex-15-**05**: On considère un trapèze isocèle, où $a > 0$ est fixé mais $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ est variable :



Pour quelle valeur de α l'aire du trapèze est-elle maximale ?

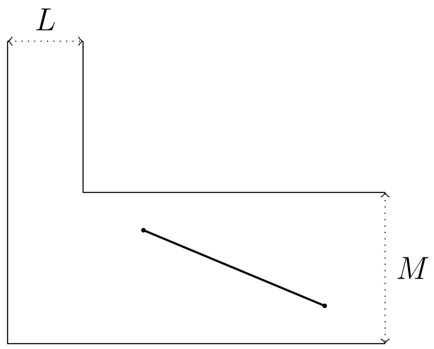
Ex-15-**06**: Parmi tous les triangles isocèles inscrits dans un disque de rayon R, lequel a une aire maximale ? *Indication* : Utiliser un angle pour paramétriser la famille de triangles.

Ex-15-07: Soit Σ une sphère de rayon r. Parmi tous les cônes de révolution tangents à Σ, (les génératrices du cône et son disque de base sont tangents à Σ), déterminer celui dont le volume est minimal.



Indication : exprimer le volume des cônes en fonction de leur hauteur h.

Ex-15-08: **Facultatif** On souhaite faire passer une barre de longueur ℓ dans le couloir en forme de "L" représenté sur l'image ci-dessous. Quelle est la plus grande barre que l'on peut faire passer ?



Réponses:

Ex-15-02: Le volume est maximum lorsque la hauteur de la boîte vaut $h = \dfrac{a}{6}$.

Ex-15-03: Le carré de côté $\frac{p}{4}$, d'aire $\frac{p^2}{16}$.

Ex-15-04: 1) $Q_* = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ 2) $Q_* = (2, 4)$

Ex-15-05: L'aire du trapèze est maximale lorsque $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Ex-15-06: Le triangle isocèle d'aire maximale est celui qui est aussi équilatéral.

Ex-15-07: Le cône de volume minimal a pour volume $V_{\min} = \dfrac{8\pi}{3} r^3$.

Ex-15-08: $L\left(1 + (M/L)^{2/3}\right)^{3/2}$