Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 14: TAF, règle de Bernoulli-l'Hôpital

Ex-14-01: Étudier les limites suivantes.

a) $a(x) = \dfrac{1-3x^2+2x^3}{1-x+\ln x}$, $x \to 1$

b) $b(x) = \dfrac{e^x-2x-1}{x^2+x-e^{-x}}$, $x \to 0$

c) $c(x) = \dfrac{a^x-e^x}{x}$, $x \to 0$

d) $d(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$, $x \to 0$

e) $e(x) = \dfrac{x}{\ln(3x+\cosh(2x))}$, $x \to -\infty$

f) $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(x)$, $x \to 0^+$

g) $g(x) = \big(\tanh(x)\big)^{\sinh^2(x)}$, $x \to +\infty$

h) $h(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, $x \to 0$

Ex-14-02: Le résultat suivant a été prouvé en cours : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ sur I.*

a) Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I. Adaptez la preuve vue au cours pour prouver l'affirmation suivante : *Si $f'(x) > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.*

La réciproque de cette affirmation est-elle vraie ? En d'autres termes : si f est strictement croissante sur I, peut-on en conclure que $f'(x) > 0$ sur I ? Prouvez-le ou donnez-en un contre-exemple.

b) Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \,]-1,1[\, \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Étudiez le signe de f'. f est-elle décroissante ? Cette fonction constitue-t-elle un contre-exemple au théorème vu en cours ?

c) Prouvez le deuxième volet du résultat vu en cours : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leq 0$ sur I.*

Ex-14-03: Montrer : *Soient f, g dérivables sur un intervalle ouvert I, telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$. Alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x) + c$ pour tout $x \in I$.*

Ensuite, montrer que si le domaine n'est plus un intervalle, alors le résultat n'est plus vrai en général, en donnant un exemple de deux fonctions f, g, dérivables sur $D =]0,2[\setminus\{1\}$ telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in D$, mais pour lesquelles il n'existe aucune constante c telle que $f(x) = g(x) + c$ pour tout $x \in D$.

Ex-14-04: On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{\ln(\cosh(x))}{x^n}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour quelles valeurs du paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction g est-elle prolongeable par continuité en $x = 0$?

Ex-14-05: Au cours, il a été démontré que *si f est continue en x_0 et dérivable dans un voisinage épointé de x_0, et si $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$.*
Utiliser ce résultat (en vérifiant les hypothèses) pour montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'**Ex-**13-06 est dérivable en $x_0 = 1$, et calculer sa dérivée en ce point.
On vérifiera que ce qu'on obtient coïncide bien avec ce qui avait été calculé précédemment.

Réponses:

Ex-14**-**01: a) -6, b) 0, c) $\ln(a)-1$, d) n'existe pas, e) $-1/2$, f) 0, g) $1/\sqrt{e}$, h) $e^{-\frac{1}{6}}$.
Ex-14**-**04: g est prolongeable seulement lorsque $n=1$ et $n=2$.