Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 13: Théorème de Rolle et conséquences

Ex-13-01: Déterminer les points de tangence T des tangentes issues de l'origine à la courbe Γ d'équation $y = \dfrac{3x+1}{x^2-x+4}$.

Ex-13-02: On donne deux arcs de parabole Γ_1 et Γ_2 définis par

$$\Gamma_1 : \quad f_1(x) \;=\; -2x^2+6 \qquad \text{et} \qquad \Gamma_2 : \quad f_2(x) \;=\; -(x-1)^2\,.$$

a) Esquisser les deux courbes et leurs deux tangentes communes, l'une de pente positive et l'autre de pente négative (sans calculer explicitement les points de tangence).

b) Déterminer l'équation cartésienne de la tangente t commune aux courbes Γ_1 et Γ_2, de pente négative. Indication : si x_1 et x_2 sont les abscisses respectives des points de tangence de t avec Γ_1 et Γ_2, commencez par exprimer x_2 en fonction de x_1 (ou vice-versa).

Ex-13-03: Le Théorème de Rolle affirme que si une fonction f satisfait les hypothèses
H1 : f est continue sur $[a, b]$,
H2 : f est dérivable sur $]a, b[$,
H3 : $f(a) = f(b)$,
alors f satisfait **C** : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Donner un exemple de fonction

a) qui satisfait H2 et H3 mais pas H1, et qui ne satisfait pas C.

b) qui satisfait H1 et H3 mais pas H2, et qui ne satisfait pas C.

c) qui satisfait H1 et H2 mais pas H3, et qui ne satisfait pas C.

d) qui satisfait H1 et H3 mais pas H2, et qui satisfait C. L'existence de cette fonction contredit-elle le Théorème de Rolle ?

e) qui ne satisfait aucune des hypothèses H1, H2 et H3 mais qui satisfait C. L'existence de cette fonction contredit-elle le Théorème de Rolle ?

Ex-13-04: Soient $f(x) = x^2 - x$, Γ la courbe définie par $y = f(x)$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$.

- Déterminer $x_0 \in]0; b[$ tel que la tangente à Γ en x_0 soit parallèle à la sécante définie par les deux points de Γ d'abscisses $x = 0$ et $x = b$.
- Faire une représentation graphique de cette situation, qui illustre le théorème des accroissements finis.

Ex-13-05: Soit $f(x) = x^2 \cdot (2 - x^2)$. Montrer qu'il existe au moins un point d'abscisse $x \in]0, 1[$ tel que la droite tangente au graphe de f en ce point soit parallèle à la droite d d'équation $x - y = 4$.

Ex-13-06: On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} \text{ si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$

a) Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[0, 2]$, et en déduire qu'il existe $c \in]0, 2[$ tel que $f(2) - f(0) = (2 - 0)f'(c)$.

b) Déterminer toutes les valeurs de c.

Ex-13-07: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue. Dire si chaque affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Si l'affirmation est fausse, donner un contre-exemple.

a) Si il existe un point $x_0 \in]a, b[$ où f n'est pas dérivable, alors il n'existe aucun point $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

b) Si f est dérivable et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $f(a) \neq f(b)$.

c) Si f est dérivable et si il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$, alors $f(a) = f(b)$.

Réponses:

Ex-13-01: $T(-1; -\frac{1}{3})$

Ex-13-02: $t : 4x + y - 8 = 0$.

Ex-13-04: $x_0 = \frac{b}{2}$

Ex-13-06: $c = \frac{1}{2}$ ou $c = \sqrt{2}$