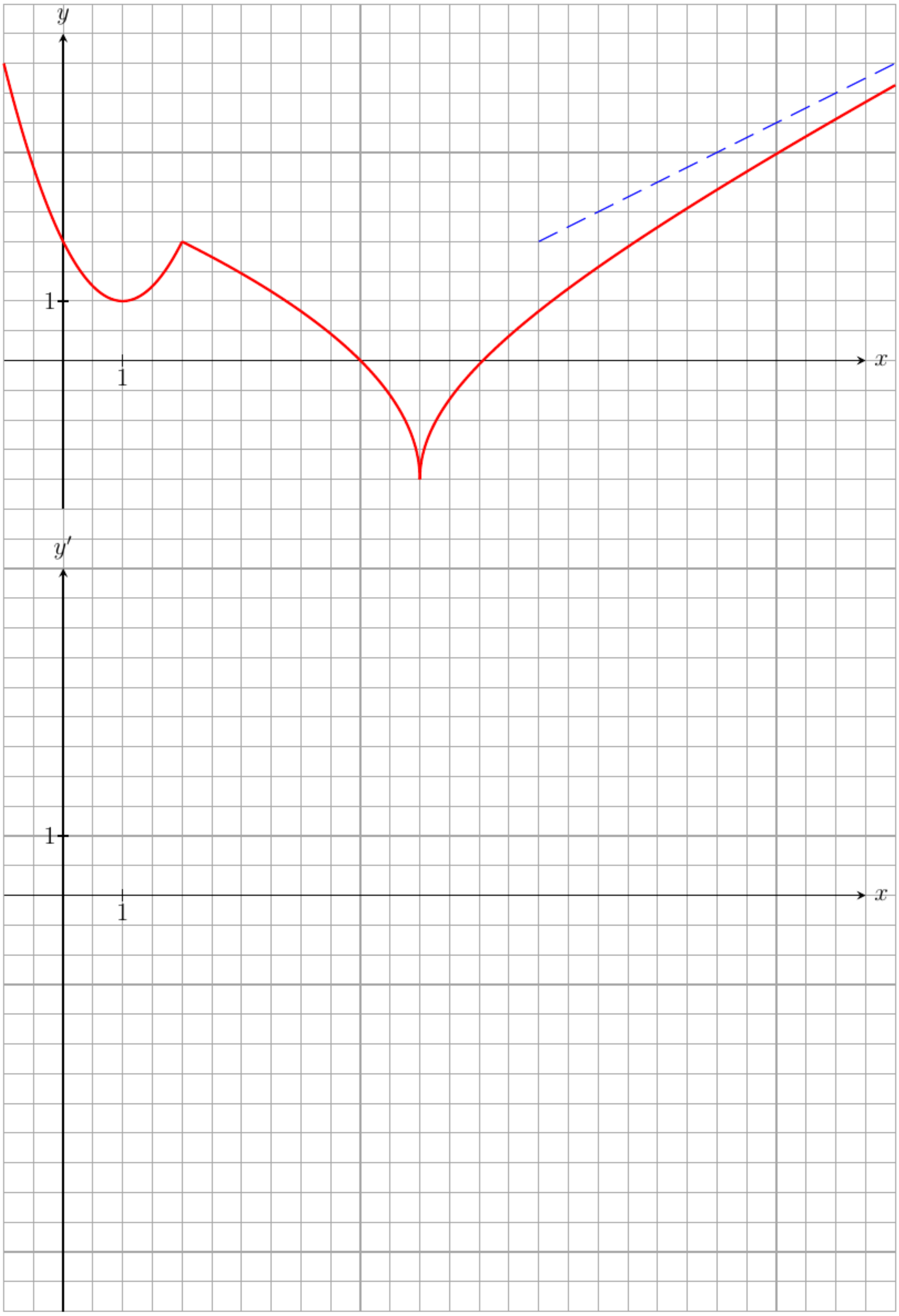
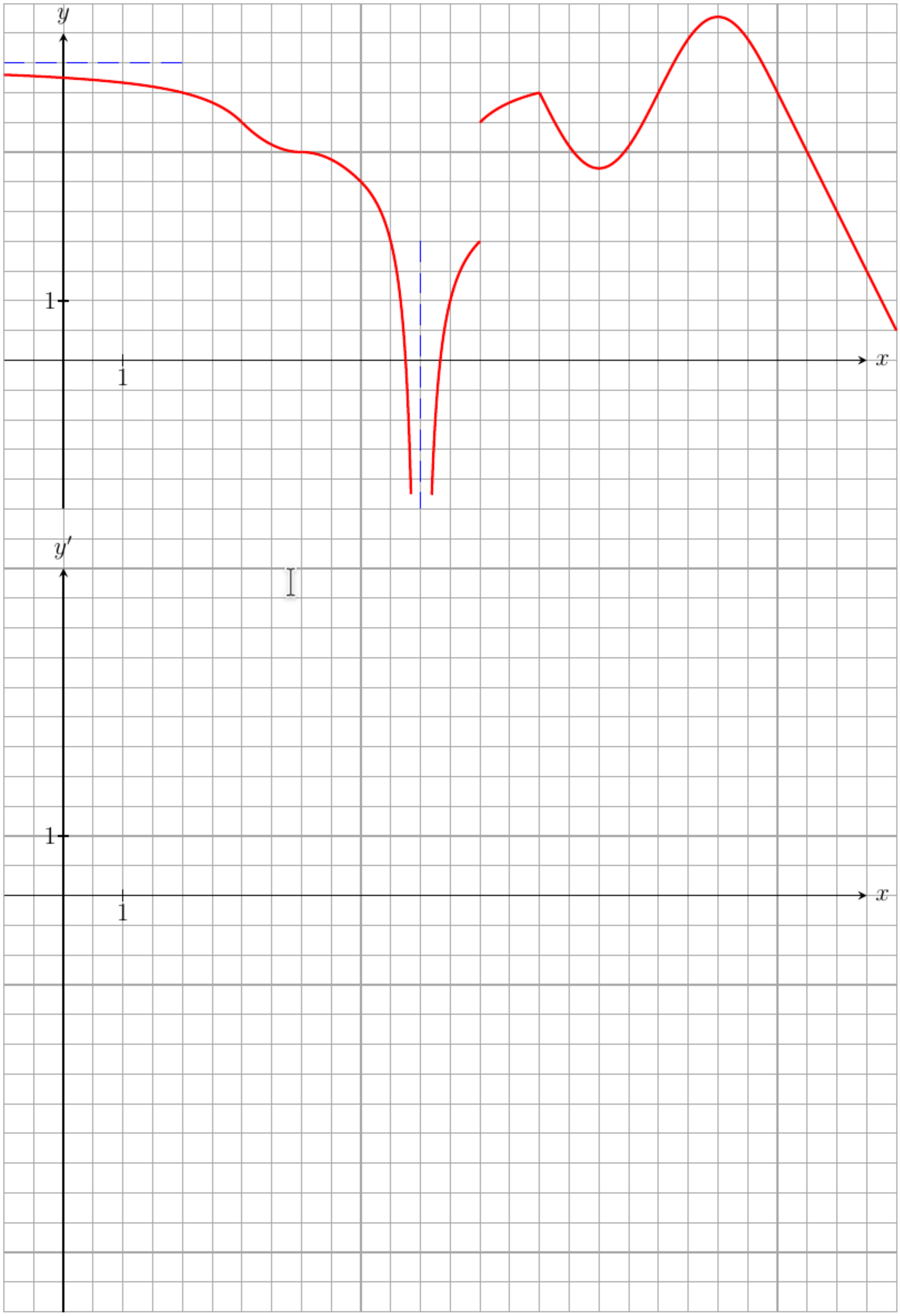
Série 12: Fonction dérivée

Ex-12-01: On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$. Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.



On donne ci-dessous la courbe Γ d'équation $y = f(x)$. Esquisser le graphe de la fonction dérivée de f.



Ex-12-02: En utilisant les règles de dérivation, calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes, en précisant leur ensemble de définition et celui de la fonction dérivée.

a) $a(x) = x^6 + 15\sqrt[5]{x^2} - \dfrac{6}{x}$

b) $b(x) = \dfrac{4x-1}{2x+1}$

c) $c(x) = \sqrt{\dfrac{1-2x}{x+1}}$

d) $d(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

e) $e(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{x^3}\right)^2}$

Ex-12-03:

a) Soit $g(x) = (x-1)^5(2x+1)^5$; pour quelles valeurs de x la dérivée $g'(x)$ est-elle nulle ?

b) Soit $h(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+a)}$; pour quelle valeur de a la dérivée $h'(x)$ est-elle nulle en $x = -1$?

Ex-12-04: Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse en donnant une preuve ou un contre-exemple.

a) Si $f+g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f et g sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$.

b) Si $f \circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f et g sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$.

c) Si fg est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f et g sont aussi dérivables sur $\mathbb{R}$.

d) Si λf est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}$, alors f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

e) Si λf est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour une constante $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ex-12-05:

a) Soient f et g dérivables en x_0 et telles que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de x_0. Prouver que $f'(x_0) = g'(x_0)$.

b) Montrer que la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire dérivable est impaire.

c) Montrer que la dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire dérivable est paire.

Pour b) et c), on n'utilisera pas de règles de dérivation.

Ex-12-06: Soit $\widehat{b}$ la prolongée de la fonction b de l'Ex-08-08 b) (voir Ex-11-06).

a) Montrer que $\widehat{b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en donnant $\widehat{b}'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\widehat{b}'$ est continue en $x_0 = 0$.

Ex-12-07: (**Facultatif**) Soient f et g deux fonctions dérivables en $x \in \mathbb{R}$. Démontrer les règles de dérivations suivantes :

a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

b) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$

c) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Réponses:

Ex-12-02:

a) $a'(x) = 6\left(x^5 + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} + \dfrac{1}{x^2}\right)$, $D_a = D_{a'} = \mathbb{R}^*$.

b) $b'(x) = \dfrac{6}{(2x+1)^2}$, $D_b = D_{b'} = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

c) $c'(x) = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^3(1-2x)}}$, $D_c =]-1\,;\frac{1}{2}]$ et $D_{c'} =]-1;\frac{1}{2}[$.

d) $d'(x) = \dfrac{7}{8}\dfrac{1}{\sqrt[8]{x}}$, $D_d = \mathbb{R}_+$ et $D_{d'} = \mathbb{R}_+^*$.

e) $e'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2$, $\quad D_e = D_{e'} = \mathbb{R}$.

f) $f'(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1-\sqrt{x^3}}}$, $D_f = \mathbb{R}_+$ et $D_{f'} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

Ex-12**-**03:

a) $g'(x) = 5(4x-1)(x-1)^4(2x+1)^4$, $D_g = D_{g'} = \mathbb{R}$
$g'(x) = 0$ si et seulement si $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\}$.

b) $h'(x) = \dfrac{3x+2a-1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+a)^2(x-1)}}$, $D_h = \mathbb{R}$, $D_{h'} = \mathbb{R} \setminus \{1, -a\}$
$h'(-1) = 0$ si et seulement si $a = 2$.

Ex-12**-**04: Toutes les affirmations sont fausses sauf la dernière.