

Série 11: Dérivabilité

Ex-11-01: En utilisant la définition du nombre dérivé comme limite d'un rapport de Newton, déterminer l'équation de la tangente t au graphe de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x_0 = 2$.

Ex-11-02: Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en $x = 0$?

- a) $a(x) = \tan |x|$
- b) $b(x) = x \sin |x|$
- c) $c(x) = \sin(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $c(0) = 0$
- d) $d(x) = \sin^2(x) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $d(0) = 0$

Ex-11-03: On considère la fonction g définie dans un voisinage de $x_0 = \frac{\pi}{2}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x) + \sin x}{\sin(2x)} & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Montrer, à l'aide de la définition de dérivée, que g est dérivable en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Ex-11-04: Peut-on prolonger la fonction $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ par continuité en $x_0 = 0$, de telle sorte que la prolongée \hat{f} soit dérivable en x_0 ?

Ex-11-05: Estimer, à l'aide de l'approximation linéaire, la quantité $A = \sqrt[4]{16,032}$.

Ex-11-06: Montrer que la fonction $b(x)$ de l'Ex-08-08 b) peut être prolongée par continuité en $x_0 = 0$. Sa prolongée \hat{b} est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

Ex-11-07: Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2 & x \leq 1 \\ x^2 - 3 & x > 1 \end{cases}$$

- a) f est-elle dérivable à gauche en 1 ? dérivable à droite en 1 ? dérivable en 1 ?
- b) Esquisser le graphe de la fonction f .

Ex-11-08: Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre et soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ ax & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour quelles valeurs du paramètre a la fonction f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

Réponses:

Ex-11-01: $x + 4y - 3 = 0$

Ex-11-02: $b(x)$ et $d(x)$ sont dérivables en $x = 0$, mais $a(x)$ et $c(x)$ ne le sont pas.

Ex-11-03: $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3}{4}$

Ex-11-05: Soit $f(x) = \sqrt[4]{x}$. L'approximation linéaire de $f(x_0 + \Delta x)$ en $x_0 = 16$ et pour $\Delta x = 0,032$ est égale à 2,001.

Ex-11-06: $\hat{b}(0) = 1$ et $\hat{b}'(0) = \frac{1}{2}$

Ex-11-08: $a = 0$