Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 10: Continuité

Ex-10-01: Montrer, en n'utilisant que la définition de limite, que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue en tout point $x_0 > 0$.

Ex-10-02:

a) La fonction $f(x) = \begin{cases} |\tan x| \cdot \cos^3(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue en $x = 0$?

b) Montrer que la fonction $f(x) = x - E(x^2)$ est continue à droite en $x = \sqrt{2}$.

Ex-10-03: La fonction $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle continue en $x = 0$? Justifier votre réponse.

Ex-10-04: Peut-on trouver des constantes A et B de sorte que les fonctions suivantes, définies en 0 et dans son voisinage, soient continues en 0 ?

$$a(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|(x+1)+x}{x^2(x+1)} & \text{si } x \neq 0\,, \\ A & \text{si } x = 0 \end{cases}, \qquad b(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3 - 4\cos x + \cos^2 x}}{|x|\sin x} & \text{si } x \neq 0\,, \\ B & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ex-10-05: Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

a) Soient f, g deux fonctions réelles telles que $h = g \circ f$ soit continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. Si g est continue sur $\mathbb{R}$, alors f est continue en x_0.

b) L'image par une fonction continue d'un intervalle ouvert est un intervalle ouvert.

c) L'image par une fonction continue d'un ensemble borné est un ensemble borné.

d) L'image réciproque par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle.

Ex-10-06: Si f est définie et continue en tout point d'un voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$, et si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et vaut $L \in \mathbb{R}$, on peut définir sur ce voisinage

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0, \\ L & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est alors continue aussi en x_0 puisque

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = L = \tilde{f}(x_0)\,.$$

On appelle $\tilde{f}$ le **prolongement par continuité** de f en x_0, et on dit que f est **prolongeable par continuité en** x_0. Les fonctions ci-dessous sont-elles prolongeables par continuité en x_0 ? Si oui, donner leur prolongement.

a) $a(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$, $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $x_0 = 0$

c) $c(x) = x\cos(1/x)$, $x_0 = 0$

d) $d(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{\sin^2 x - \tan^2 x}$, $x_0 = 0$

e) $e(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$

Ex-10-07: Montrer que les deux courbes Γ_1 et Γ_2 admettent un point d'intersection, et localiser son abscisse sur un intervalle de longueur Δ :

a) $\Gamma_1 : y = \cos(x)$, $\Gamma_2 : y = x^3$, $\Delta = \frac{\pi}{12}$.

b) $\Gamma_1 : y = \ln(x)$, $\Gamma_2 : y = \sqrt{x-2}$, $\Delta = 1$.

Ex-10-08: Soit $f : [0,1] \to [0,1]$. Montrer que si f est continue, alors elle admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Ex-10-09: (**Facultatif**) Démontrer le résultat suivant : Soient f et g deux fonctions, f définie sur un voisinage épointé de x_0. Si f est telle que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ et si $g(x)$ est continue en a, alors

$$\lim_{x\to x_0} g\left(f(x)\right) = g\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big) = g(a)\,.$$

Réponses:

Ex-10-02:

a) Oui, car $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

b) Oui, car $\lim_{x\to\sqrt{2}^+} f(x) = f(\sqrt{2}\,)$

Ex-10-03: Non.

Ex-10-04:

a) Non

b) Oui : $B = 1$

Ex-10-06: Seules b, c et d sont prolongeables par continuité.