Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 09: IPE et limites infinies en un point

Ex-09-01: Soit f définie dans un voisinage épointé de x_0. Montrer que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L\,.$$

Ex-09-02: Étudier les limites suivantes :

a) $a = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\,\sin x}$

b) $b = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^6)}{(1-\cos 3x)^3}$

c) $c = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+2\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

d) $d = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2\cos x-3\cos^2 x}{\sin(x^2\sqrt{4-x})}$

e) $e = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin(\pi x)}$

f) $f = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[2\sin x-\sin(2x)]^2}{x^6}\,\sin(\frac{1}{x^6})$.

Ex-09-03: Pour quelle valeur du paramètre réel a, la limite suivante existe-t-elle ?

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

Donner alors la valeur de cette limite.

Ex-09-04: Soient a et b deux réels strictement positifs. Déterminer, si elles existent, les limites lorsque $x \to 0$ des deux fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x}{a}\cdot E\left(\dfrac{b}{x}\right)$,

b) $g(x) = \dfrac{b}{x}\cdot E\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

Ex-09-05: On considère la fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{x\cdot(x-b)^2}{(x+1)\,(x-a)}\,,$$

où a et b sont des paramètres réels.

a) Déterminer les conditions sur les paramètres a et b pour que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. Donner alors la valeur de cette limite.

b) Déterminer les conditions sur les paramètres a et b pour que $f(x)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque $x \to a$.

Ex-09-06: Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{(x+2)^2}} + \cos(\frac{\pi}{x+2})\right)\left(-2+\sin(\frac{\pi}{x+2})\right)$, $x_0 = -2$.

b) $b(x) = \dfrac{1}{2x-6+\sqrt{x^2+x-2}}$, $x_0 = 2$.

Ex-09-07: Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Pour chaque affirmation fausse, donner un contre-exemple.

a) Si $\lim_{n\to+\infty} f(\alpha+x_n)=L$ pour une suite (x_n) qui tend vers 0, alors $\lim_{x\to\alpha} f(x)=L$.

b) $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0\,,\quad \exists\delta>0 \text{ t.q. }]x_0-\delta,x_0+\delta[\setminus\{x_0\}\subseteq f^{-1}(]L-\varepsilon,L+\varepsilon[).$$

(Pour un intervalle quelconque I, $f^{-1}(I)$ est défini comme l'ensemble des x tels que $f(x)\in I$).

c) Si f est bijective et $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$, alors pour tout $\varepsilon>0$, si $\delta=|f^{-1}(L+\varepsilon)-x_0|$, on a l'implication

$$0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

d) $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ si et seulement si $\forall\varepsilon>0, \exists N$ tel que $\forall x\geq N, |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

e) Si $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, alors pour toute fonction g on a $\lim_{x\to x_0} g(f(x))=+\infty$.

Réponses:

Ex-09-02: $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{8}{729}$, $c=-1$, $d=1$, $e=\frac{2}{\pi}$, f n'existe pas

Ex-09-03: $a=15$, la limite vaut alors -1.

Ex-09-04: $\lim_{x\to0} f(x)=\frac{b}{a}$, $\lim_{x\to0} g(x)$ n'existe pas.

Ex-09-05:

a) La limite existe si et seulement si $a=0$ ou $a=b$,
- si $a=0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b^2$,
- si $a=b=-1$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-1$,
- si $a=b\neq-1$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

b) La limite est infinie si et seulement si $a\neq0$ et $a\neq b$,
- si $a<-1$, alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$,
- si $a=-1$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$,
- si $-1<a<0$, alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$,
- si $0<a$, alors $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$.

Ex-09-06:

a) $\lim_{x\to-2} a(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to2^-} b(x)=-\infty$, $\lim_{x\to2^+} b(x)=+\infty$.

Ex-09-07: La seule affirmation vraie est b).