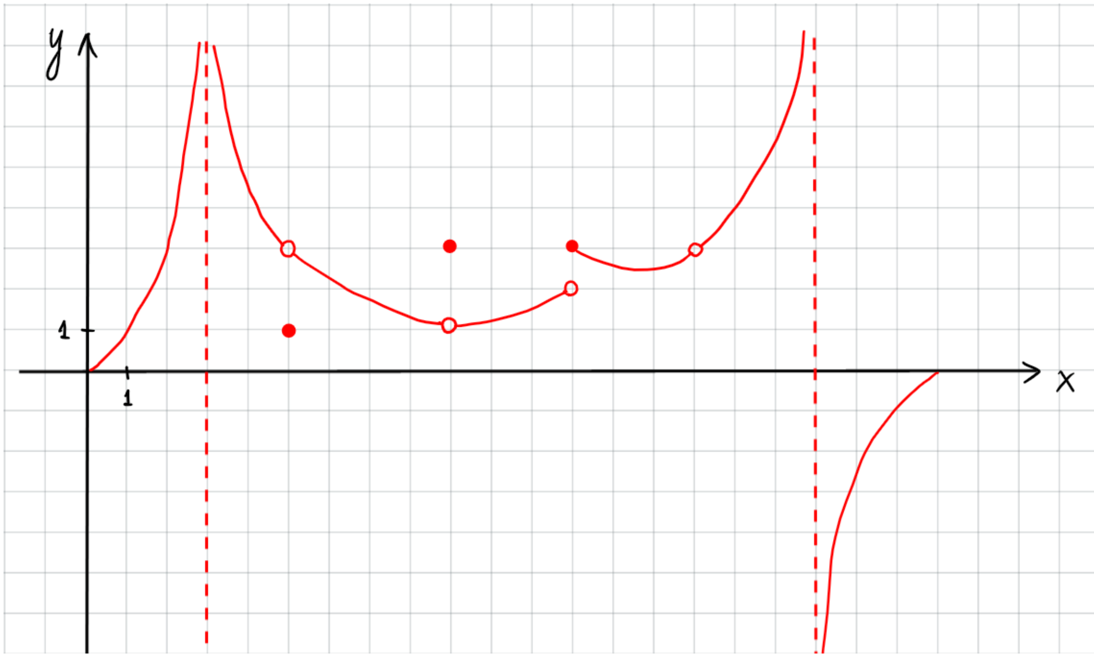
Série 08: Limites $x \to x_0$

Ex-08-01: Voici le graphe d'une fonction $f : [0, 21] \to \mathbb{R}$.



a) Pour quels points de l'intervalle $[0, 21]$ la fonction $f(x)$ est-elle définie ?

b) Pour quels points $x_0 \in \,]0, 21[$ la limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe-t-elle ?

c) Pour quels points $x_0 \in \,]0, 21[$ a-t-on $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$?

d) Pour quels points $x_0 \in \,]0, 21[$ la limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ vaut-elle 3 ?

e) Pour quels points $x_0 \in \,]0, 21[$ la limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ vaut-elle $f(x_0)$?

Ex-08-02: Soit $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels quelconques. Montrer à l'aide de la définition que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = ax_0 + b$.

Ex-08-03: En utilisant la définition de la limite d'une fonction, montrer que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x^2+1} = -1\,.$$

Ex-08-04: Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x\sin(\frac{x^2+1}{x})$. Montrer, à l'aide de la définition de limite, que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Indication : Pour faciliter la recherche du $\delta > 0$, on pourra utiliser le fait que $|\sin(t)| \leq 1$ pour tout t.

Ex-08-05: On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x + (x - \frac{3}{2}) \cdot \mathrm{sgn}(1 - x)$.

a) Représenter le graphe de f (unité = 6 carrés).

b) Pour $\varepsilon = \varepsilon_1 = 1$, déterminer graphiquement $\delta = \delta_1$ vérifiant la relation suivante :

$$0 < |x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

c) Qu'en est-il pour $\varepsilon = \varepsilon_2 = \frac{1}{3}$?

Ex-08-06: Calculer, si elle existe, la limite

$$\lim_{x\to 0} \left|\sin(x^3)\right| \cdot E\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Ex-08-07: Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{x^2+5x+1}{x+2}, \quad x_0 = 2,$

b) $b(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+7} & x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-7\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \; x_0 = 0,$

c) $c(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x+1}}, \quad x_0 = 0.$

Ex-08-08: Calculer la limite des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+2x-3}, \quad x_0 = 1,$

b) $b(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x}, \quad x_0 = 0,$

c) $c(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x^5+x^3}}{x^2+3x}, \quad x_0 = 0.$

Ex-08-09: Déterminer, si elles existent, les limites des fonctions suivantes en x_0.

a) $a(x) = \dfrac{x-2\cdot\operatorname{sgn}(x)}{x^2-4}, \quad x_0 = 0,$

b) $b(x) = x - E(x^2), \quad x_0 = \sqrt{2},$

c) $c(x) = \dfrac{-x}{\sqrt[4]{x^6+x^4}}, \quad x_0 = 0,$

d) $d(x) = \dfrac{x^2-7x+10}{\sqrt{x^3-3x^2+4}}, \quad x_0 = 2.$

Ex-08-10: Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Pour chaque affirmation fausse, donner un contre-exemple.

a) Si f est impaire, telle que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ell$, alors $\ell = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ si et seulement si $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0$ tel que $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon$.

c) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, alors pour toute fonction g définie sur $\mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to x_0} g\left[f(x)\right] = g(\ell)$.

Ex-08-11: Démontrer le résultat suivant : Soit f une fonction à valeurs réelles strictement positives. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Ex-08-12: (**Facultatif**) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage épointé de x_0.

a) Montrer que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors f est bornée dans un voisinage de x_0 : il existe des constantes $C > 0$ et $\xi > 0$ telles que $|f(x)| \le C$ pour tout $0 < |x-x_0| < \xi$.

b) Montrer que si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab.$$

Réponses:

Ex-08**-**01:

a) $[0,21]\setminus\{3,15,18\}$.

b) $]0,21[\ \setminus\{3,12,18\}$.

c) $x_0=3$.

d) $\{2,5,15\}$.

e) $]0,21[\ \setminus\{3,5,9,12,15,18\}$.

Ex-08**-**06: $\lim\limits_{x\to 0}\left|\sin(x^3)\right|\cdot E\left(\frac{1}{x^2}\right)=0$, à l'aide du théorème des deux gendarmes.

Ex-08**-**07: $\lim_{x\to 0}a(x)=\frac{15}{4}$, $\lim_{x\to 2}b(x)=\frac{-2}{7}$, $\lim_{x\to 0}c(x)=1$.

Ex-08**-**08: $\lim_{x\to 1}a(x)=\frac{5}{4}$, $\lim_{x\to 0}b(x)=1$, $\lim_{x\to 0}c(x)=\frac{1}{3}$.

Ex-08**-**09: Aucune des limites n'existe.