

Série 07: Limites $x \rightarrow \pm\infty$

Ex-07-01: On considère la fonction $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- a) On fixe $\varepsilon = \frac{1}{10}$; déterminer M tel que $x > M \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.
- b) A l'aide de la définition de la limite d'une fonction, montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

Ex-07-02: Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $+\infty$.

- a) $a(x) = \frac{(2x+1)^2(3x-1)(25x^2-1)}{60x^5 - x^3 - 6x + 8}$
- c) $c(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
- b) $b(x) = \frac{|x|\sqrt{x+x^{-1}}}{\sqrt[3]{x^4-1}}$
- d) $d(x) = \sqrt{x(x+1)} - x$.

Ex-07-03: Calculer la limite des fonctions suivantes lorsque x tend vers $-\infty$.

- a) $a(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 2}}$
- c) $c(x) = x^2 (\sqrt[3]{8x^3 - 1} - 2x)$
- b) $b(x) = x (\sqrt{x^2 + 1} + x)$
- d) $d(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 - x}$.

Ex-07-04: Etudier la convergence de la fonction f définie par $f(x) = \frac{(x+1)\sin x}{2x+1}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Justifier rigoureusement votre réponse.

Ex-07-05: Déterminer p et q réels de sorte que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, on ait

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + ax + b} - (px + q)] = 0.$$

Ex-07-06: Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + \sin x}}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 1)(\sin x - 2)}{2x + 1}$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \cos x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + 2x)(3 - \cos^2 x)$.

Ex-07-07: Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. Calculer, si elle existe, la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} \cdot E\left(\frac{x}{b}\right).$$

($E(y)$ est la valeur entière de y .)

Réponses:**Ex-07-01:**

- a) $M \geq 21$.
b) $\forall \varepsilon > 0, x > M(\varepsilon) \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, on a $\left| \frac{2x}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$.

Ex-07-02:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 5$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = 2$
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = \frac{1}{2}$

Ex-07-03:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = 2$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = -\frac{1}{12}$
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = -\frac{1}{2}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = -\frac{1}{2}$

Ex-07-05: $p = -1$ et $q = -\frac{a}{2}$.**Ex-07-06:** 1) 1, 2) 0, 3) $-\infty$, 4) $-\infty$.**Ex-07-07:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x} \cdot E\left(\frac{x}{b}\right) = \frac{a}{b}$