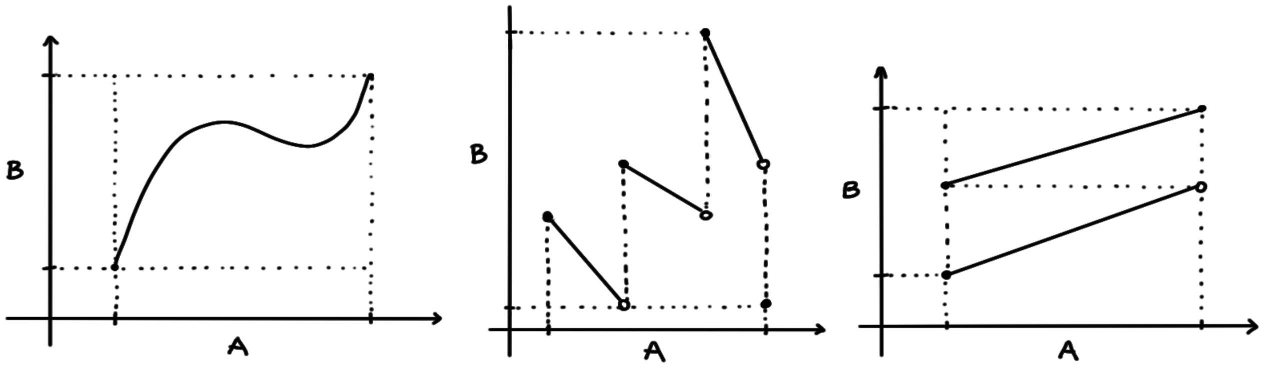
Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 06: Surjection, bijection, réciproque

Ex-06-01: Parmi les images suivantes, y en a-t-il qui représentent le graphe d'une fonction $f : A \to B$ injective ? surjective ? bijective ?



(On suppose que A et B sont des intervalles fermés.)

Ex-06-02:

a) Montrer que la fonction $f(x) = x^2$, définie sur $[-1, +\infty[$, n'est pas injective.
b) Montrer que la fonction $f(x) = x^2$, définie sur $]0, \infty[$, est injective.
c) Montrer que $f : [1, 2] \to [-1, 2]$, $f(x) = x^2 - x$ n'est pas bijective.

Ex-06-03: Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ? Justifier rigoureusement votre réponse.

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto 2n$
b) $g : [0, 4] \to [0, 6[, \quad x \mapsto \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x \in [0, 2] \\ -2x + 10 & \text{si } x \in]2, 4] \end{cases}$

Ex-06-04: On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 1}{x^2 + 1}.$$

Montrer que f n'est pas surjective, puis restreindre son ensemble d'arrivée de sorte qu'elle le devienne.

Ex-06-05: Les deux fonctions suivantes, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sont-elles injectives ? Justifier rigoureusement votre réponse.

a) $g(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + x + 2}$

b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Ex-06-06: Pour chacune des fonctions suivantes, esquisser son graphe, puis déterminer l'intervalle I (le plus grand possible) contenant x_0 de sorte que la fonction soit injective sur I.

a) $a(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$, $x \in]-1, 1[$, $x_0 = -\frac{2}{3}$

b) $b(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 9$

Ex-06-07:

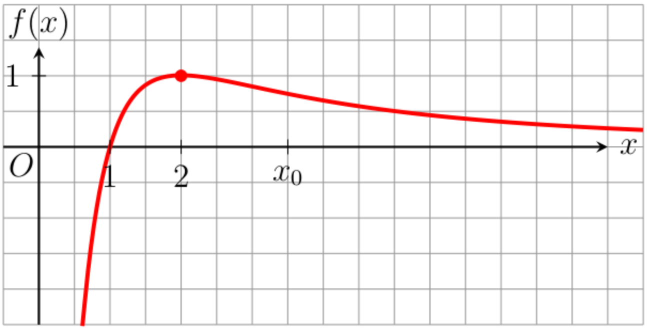
a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ est bijective, et calculer sa réciproque. Sur un même repère cartésien, représenter les graphes de f et f^{-1}.

b) Soit $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Montrer que f est bijective et calculer sa réciproque. Sur un même repère cartésien, représenter les graphes de f et f^{-1}.

c) Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\sinh(x)$ est bijective, et calculer sa réciproque. Rappel : $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. (Indication : on pourra directement montrer que l'équation $y=f(x)$ possède toujours une unique solution.)

Ex-06-08: On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par $f(x)=x(2-x)$. Déterminer $\operatorname{Im} f$, puis un intervalle A tel que $f:A\to\operatorname{Im} f$ soit bijective. En déduire alors sa fonction réciproque. Enfin, esquisser les graphes de f et f^{-1}.

Ex-06-09: On donne ci-dessous le graphe d'une fonction f qui admet les axes de coordonnées comme asymptotes.



Si $x_0>2$, déterminer un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et tel que $f:D\to\,]-\infty,1]$ soit bijective.

Réponses:

Ex-06-03: g est surjective, f ne l'est pas.
Ex-06-04: $B=\operatorname{Im}(f)=[-4,6]$.
Ex-06-05: g et h ne sont pas injectives.
Ex-06-06: a) $I=]-1,0]$, b) $I=[\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}]$
Ex-06-08: $f^{-1}:]-\infty,1]\to[1,+\infty[$, $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x}$
Ex-06-09: Il y a une infinité de solutions possibles, mais aucune telle que D soit un intervalle.