Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 05: Fonctions, ensemble image, graphe

Ex-05-01: Déterminer la parité des fonctions suivantes :

a) $a(x) = x|x|$

b) $b(x) = x(x^2 + px + q),\ p, q \in \mathbb{R}$

c) $c(x) = E(\sin x)$ (rappel : $E(x) =$ valeur entière de x)

d) $d(x) = |\sin x| + \cos\left(\sqrt{2}x\right)$

e) $e(x) = \tan^2\left(\frac{2}{x} + x\sqrt{|x|}\right)$

Ex-05-02: Sans faire de calculs,

a) construire le graphe de $F(x) = \big||x-2| - 1\big|$ à partir de celui de $f(x) = |x|$,

b) construire le graphe de $G(x) = x^2 + 6x + 7$ à partir de celui de $f(x) = x^2$,

c) et construire le graphe de $H(x) = \frac{x-1}{x-2}$ à partir de celui de $h(x) = \frac{1}{x}$.

Ensuite, déterminer graphiquement l'ensemble image de chacune des fonctions F, G et H.

Ex-05-03: Esquisser le graphe des fonctions suivantes, puis en déduire leur ensemble de définition et leur ensemble image.

a) $a(x) = \big|2x + |x-2|\big|$,

b) $b(x) = \frac{|x|}{x^3+x}$ si $x \neq 0$ et b(0)=2.

Ex-05-04: Expliciter l'ensemble image des fonctions suivantes, analytiquement (sans faire appel à leurs graphes).

a) $f(x) = x^2 - 4x + 8$,

b) $f(x) = \frac{3x+6}{x-1}$.

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$.

Ex-05-05:

a) On considère les deux fonctions $A(x) = E(x)$ et $a(x) = \sqrt{16 - x^2}$.
Esquisser le graphe de la fonction $A \circ a$.

b) On considère les deux fonctions $B(x) = x - \frac{\pi}{2}$ et $b(x) = \sin(x)$.
Esquisser le graphe des fonctions $B \circ b$ et $b \circ B$.

Ex-05-06: Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse brièvement par un raisonnement, ou un contre-exemple si possible.

a) Les expressions $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-4}$ et $g(x) = x$ définissent la même fonction.

b) Le graphe de la fonction $g(x) = f(x+3)$ est obtenu à partir du graphe de $f(x)$ par un décalage de 3 unités vers la droite.

c) La somme de deux fonctions paires est paire.

d) La somme de deux fonctions impaires est impaire.

e) Le produit de deux fonctions paires est pair.

f) Le produit de deux fonctions impaires est impair.

Ex-05-07: **Facultatif** On considère la suite $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

a) Montrer que $a_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$.

b) En déduire que cette suite est croissante et majorée.

c) Soit (e_n) la suite définie par $e_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, qui converge vers e (voir cours précédent). Montrer que (a_n) converge aussi vers e.

Réponses:

Ex-05-01: Fonctions paires : $d(x)$ et $e(x)$.
Fonctions impaires : $a(x)$ et $b(x)$ si $p = 0$.
Fonctions ni paires ni impaires : $c(x)$ et $b(x)$ si $p \neq 0$.

Ex-05-02:

a) $\mathrm{Im}(F) = \mathbb{R}_+$.

b) $\mathrm{Im}(G) = [-2, +\infty[$.

c) $\mathrm{Im}(H) = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Ex-05-03:

a) $D_a = \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(a) = \mathbb{R}_+$.

b) $D_b = \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(b) =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup \{2\}$.

Ex-05-04:

a) $\mathrm{Im}(f) = [4, +\infty[$.

b) $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$.

c) $\mathrm{Im}(f) = [0, 1[$

Ex-05-05:

a) $(A \circ a)(x) = E\left(\sqrt{16 - x^2}\right)$.
Le graphe de $a(x)$ est le demi-cercle de centre O et de rayon $r = 4$.

b) $(B \circ b)(x) = -\frac{\pi}{2} + \sin(x)$ et $(b \circ B)(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ex-05-06: c), d), e) sont vrais, les autres sont faux.