Série 04: Sommes et séries géométriques

Ex-04-01: Soit S la valeur de la somme $\sum_{i=2}^{100} 2^i$. Exprimer chacune des sommes suivantes en fonction de S. (Remarque : on ne calculera pas explicitement la valeur de S !)

a) $S_a = \sum_{k=4}^{102} 2^{k-2}$

b) $S_b = \sum_{i=4}^{102} 2^{i+2}$

c) $S_c = \sum_{k=4}^{102} 2^k$

d) $S_d = \sum_{i=0}^{98} 2^{i+2}$

e) $S_e = \sum_{k=0}^{98} 2^{k-2}$

f) $S_f = \sum_{i=0}^{98} 2^i$.

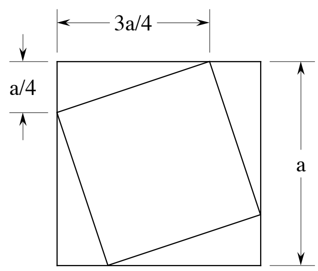
Ex-04-02: Soit $r \neq 1$. Montrer la formule ci-dessous, par récurrence sur $n \geq 1$:

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

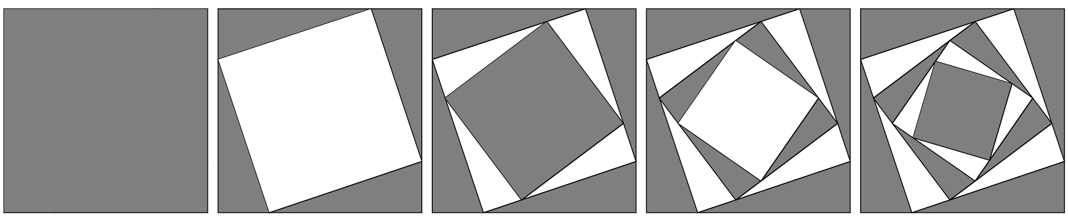
Ex-04-03: On place une infinité de cailloux dans un sac, les uns après les autres, où chaque caillou pèse le tiers du caillou précédent. Quand on a placé tous les cailloux, le sac pèse 5 kilos. Combien pèse le premier caillou ?

Ex-04-04: Soient $\{C_1, C_2, C_3, \cdots\}$ un ensemble infini de cubes. Sachant que le volume de C_{i+1} est égal à la moitié de celui de C_i, déterminer, en fonction de l'arête c du premier cube, la hauteur H de la "tour" obtenue en superposant tous les cubes de l'ensemble.

Ex-04-05: Dans un carré de côté a, on inscrit un deuxième carré, comme suit :



Dans le deuxième carré, on inscrit un troisième carré de la même manière, et ainsi de suite. On grise le carré initial, le suivant est blanc, puis le suivant grisé, etc.



étape 1 étape 2 étape 3 étape 4 étape 5

On note A_n l'aire grisée à l'étape n.

a) Déterminer l'expression de A_n en fonction de n.

b) Calculer, si elle existe, la limite de la suite (A_n) lorsque n tend vers l'infini.

Ex-04-06: Depuis le sol, on lance une balle vers le haut de sorte qu'elle atteigne une hauteur $h_1 = 5$m. Elle retombe et rebondit instantanément pour atteindre une hauteur $h_2 = p \cdot h_1$, $p = 0.81$, et ainsi de suite, chaque nouvelle hauteur atteinte étant p fois la précédente. Calculer le temps écoulé jusqu'à l'immobilisation de la balle.

On rappelle qu'un objet en chute libre lâché du repos parcourt, en un intervalle de temps t (secondes), une distance verticale de $h = \frac{1}{2}gt^2$ mètres (on prendra $g = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$ pour simplifier),

Ex-04-07: (**Facultatif**) Soit $r \in \mathbb{R}$ et soit $N \in \mathbb{N}$. Définir, à l'aide d'une limite, la somme infinie

$$T = r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \cdots$$

Donner les valeurs de r pour lesquelles cette somme infinie converge, et calculer sa valeur.

Réponses:

Ex-04-01: $S_a = S$, $S_b = 2^4 S$, $S_c = S - 2^2 - 2^3 + 2^{101} + 2^{102}$, $S_d = S$, $S_e = 2^{-4}S$, $S_f = S + 1 + 2 - 2^{99} - 2^{100}$.

Ex-04-03: Le premier caillou pèse $3.333\ldots$ kilos.

Ex-04-04: $H = \frac{c\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1} = c\left(2 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}\right)$

Ex-04-05: $A_n = a^2 \cdot \frac{1-(-\frac{5}{8})^n}{\frac{13}{8}}$, $A = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{8}{13}a^2$

Ex-04-06: 20 secondes