Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 03: Suites

Ex-03-01: Donner, s'il y en a, un ou plusieurs exemples explicites (c'est-à-dire : on définira explicitement chaque terme) de suites $(a_n)_{n\geq 1}$ possédant les propriétés suivantes.

a) Majorée, minorée, divergente, dont tous les termes sont strictement positifs.

b) Croissante, divergente, dont tous les termes sont strictement négatifs.

c) Convergente, pas monotone, dont tous les termes sont strictement positifs.

d) Convergente, possédant une infinité de termes strictement positifs, et une infinité de termes strictement négatifs.

e) Convergente, possédant une infinité de termes plus grands ou égaux à 1, et une infinité de termes négatifs.

Ex-03-02:

a) Montrer à l'aide de la définition de la convergence d'une suite que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+a}{n+b} = 1\,.$$

b) À l'aide du théorème des deux gendarmes et du premier point, calculer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-2\sin(n)}{n+3\cos(n^2)}$$

Ex-03-03: A l'aide du théorème des deux gendarmes, étudier la convergence des suites ci-dessous, lorsque $n \to \infty$:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$,

b) $b_n = \dfrac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(n+1)^2}$.

Ex-03-04: A l'aide du théorème des deux gendarmes, étudier la convergence de la suite (a_n) définie par

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+3n+1} + \frac{n^2+1}{n^3+3n+2} + \frac{n^2+2}{n^3+3n+3} + \cdots + \frac{n^2+2n-1}{n^3+5n}$$

Ex-03-05: A l'aide du théorème des deux gendarmes, montrer que la suite $a_n = \dfrac{(n+1)^n n!}{n^{2n}}$ admet une limite nulle. Indication : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Ex-03-06: Calculer, si elle existe, la limite des suites définies par les termes généraux suivants :

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{n+3}$,

b) $b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{2n}\,$,

c) $c_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}\,$,

d) $d_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}-(n^2+1)}$,

e) $e_n = \left(\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3+2n}\right)\left[2+\sin\left(\frac{n\,\pi}{60}\right)\right]$

f) $f_n = \sqrt{n^3+1}\cdot\cos\left(\frac{7n^3+5}{2n^3+n}\right)$

Ex-03-07:

a) Soit (a_n) une suite qui tend vers $+\infty$, et (b_n) telle qu'il existe une constante strictement positive $\delta > 0$ et un voisinage V de l'infini avec $b_n \geq \delta$ pour tout $n \in V$. Montrer que $(a_n \cdot b_n)$ tend vers $+\infty$.

b) En déduire que si (a_n) tend vers $+\infty$ et (b_n) converge vers $b > 0$, alors $(a_n \cdot b_n)$ tend vers $+\infty$.

Réponses:

Ex-03-02: Si $N > \frac{|a-b|}{\varepsilon} - b$, alors $n \geq N$ implique $|\frac{n+a}{n+b} - 1| < \varepsilon$.
Ex-03-03: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.
Ex-03-04: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.
Ex-03-06: $a_n \to 2$, $b_n \to -\infty$, $c_n \to 0$, $d_n \to -\infty$, $e_n \to 0$, $f_n \to -\infty$.