Analyse B (Basterrechea S., Khukhro A., Maatouk G.) Mise à Niveau, EPFL

Série 02**: Suites, limites**

Ex-02**-**01: Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Pour chaque affirmation fausse, donner un contre-exemple.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad [\exists A > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow a_n > A]\,.$

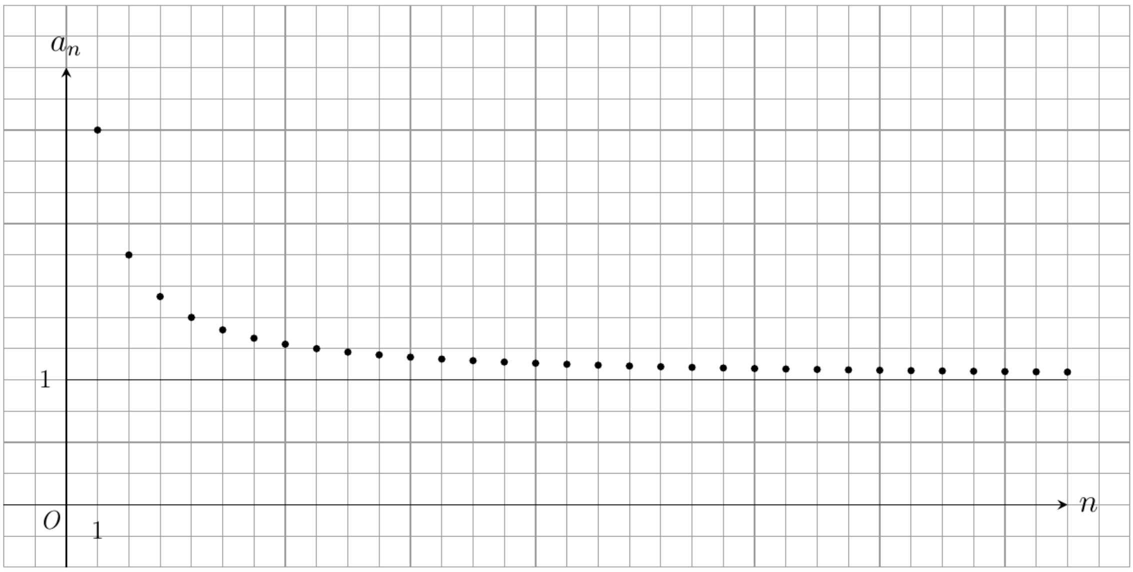
b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad [\exists A > 0\,, \text{tel que } \forall N \in \mathbb{N}^*, n \geq N \Rightarrow a_n > A]\,.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad [\forall A > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow a_n > A]\,.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad [\exists N \in \mathbb{N}^* \text{tel que } \forall A > 0\,, n \geq N \Rightarrow a_n > A]\,.$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall N \in \mathbb{N}^* \exists A > 0\,, n \geq A \Rightarrow a_n > \dfrac{\sqrt{3}N}{2}\right].$

Ex-02**-**02: Considérons une suite dont la représentation graphique est donnée ci-dessous (on suppose que le comportement observé continue de la même façon pour les termes suivants).



Cette suite tend manifestement vers 1.

a) Soit $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N(\varepsilon)$ implique $|a_n - 1| < \varepsilon$. Déterminer graphiquement $N(\varepsilon)$ dans les cas suivants : $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

b) Si on accepte que le terme général de cette suite est donné par $a_n = \frac{n+2}{n}$, démontrer à l'aide de la définition de la limite d'une suite que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ex-02**-**03: En utilisant uniquement la définition de limite, montrer que

a) Si $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$, $n \geq 1$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Si $b_n = \frac{1}{\ln(n)}$, $n \geq 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Ex-02**-**04: On reprend la suite a_n du deuxième exercice : $a_n = \frac{n+2}{n}$. Pour un $\varepsilon > 0$ fixé, on considère l'ensemble

$$E_\varepsilon = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, |a_n - \tfrac{5}{4}| < \varepsilon \right\}.$$

Vérifier que $E_{\frac{1}{4}}$ contient un voisinage de l'infini. Qu'en est-il de $E_{\frac{1}{8}}$? Que peut-on en conclure ?

Ex-02**-**05: Calculer les limites, si elles existent, des suites définies ci-dessous :

a) $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}$ b) $b_n = \dfrac{3(n+2)!+2(n+1)!}{(n+3)!}$ c) $c_n = (-1)^n \sin(\dfrac{n\pi}{2})$

Ex-02-06: Parmi les affirmations ci-dessous, déterminer celles qui définissent la limite "$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$". Pour celles qui ne définissent pas la limite, donner un contre-exemple.

a) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $n > N$ implique $|a_n - L| < \varepsilon$

b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $n \geq N$ implique $|a_n - L| \leq \varepsilon$

c) $\forall \varepsilon \geq 0$, $\exists N$ tel que $n > N$ implique $|a_n - L| \leq \varepsilon$

d) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tel que $n > N$ implique $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{5}$

e) $\exists N$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $n > N$ implique $|a_n - L| < \varepsilon$

Ex-02-07: (**Facultatif**) Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. Démontrer l'implication suivante :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b\,.$$

Réponses:

Ex-02-02: Si $N > \frac{2}{\varepsilon}$, alors $n \geq N$ implique $|a_n - 1| < \varepsilon$.

Ex-02-05: 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ 2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ 3) c_n diverge

Ex-02-06: Seules a), b) et d) sont équivalentes à la définition de limite.